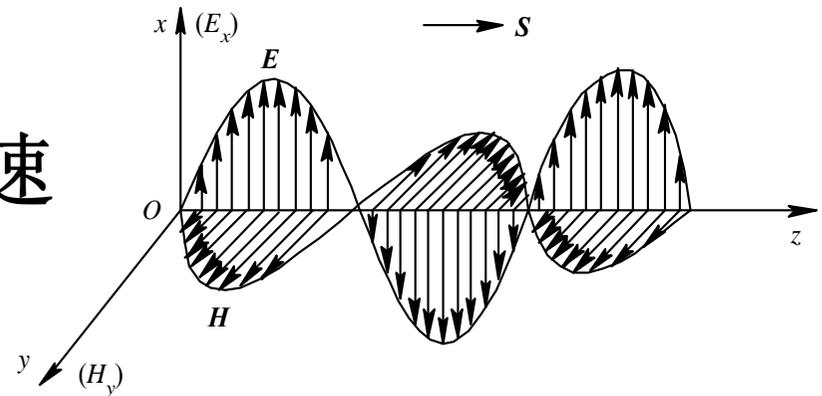


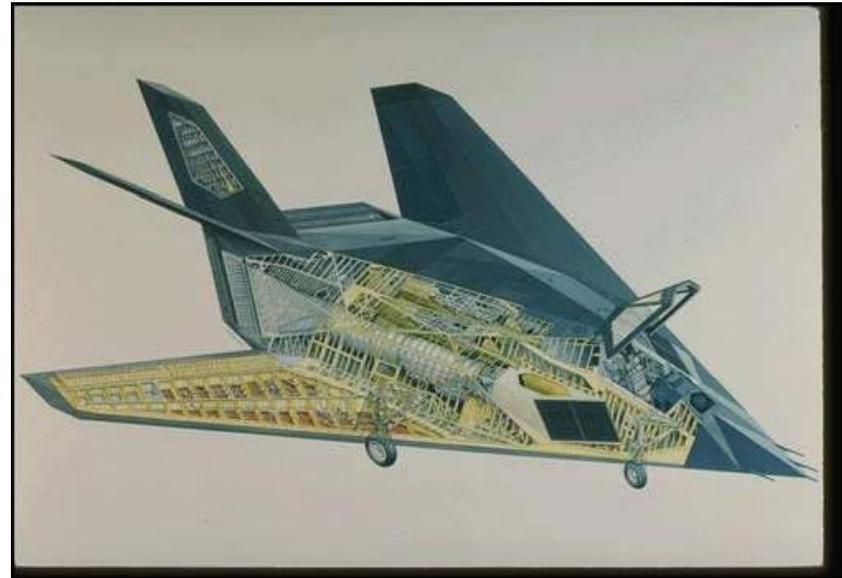
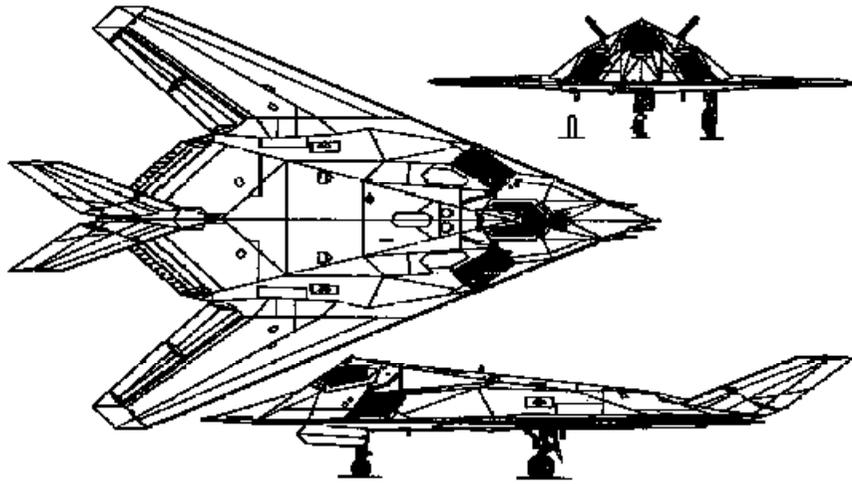
第七章 平面电磁波

本章目录:

- § 7.1 无损介质中的均匀平面波
- § 7.2 有损介质中的均匀平面波
- § 7.3 均匀平面波的极化
- § 7.4 色散现象、相速与群速
- § 7.5 非均匀平面波
- § 7.6 平面波的反射和折射
- § 7.7 平面波对理想导体的投射
- § 7.8 多层介质的反射和折射



美国F117隐形轰炸机



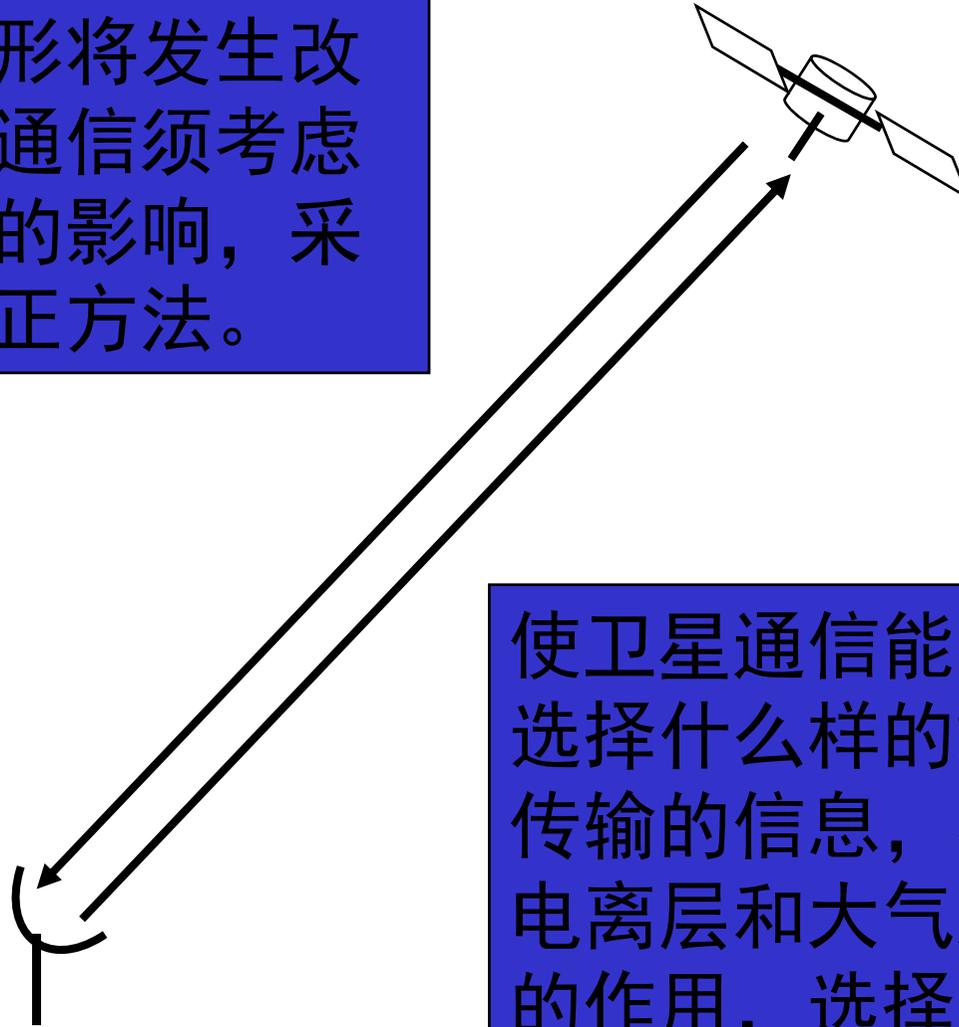
美国F117隐形轰炸机 <http://jzbz.yeah.net>



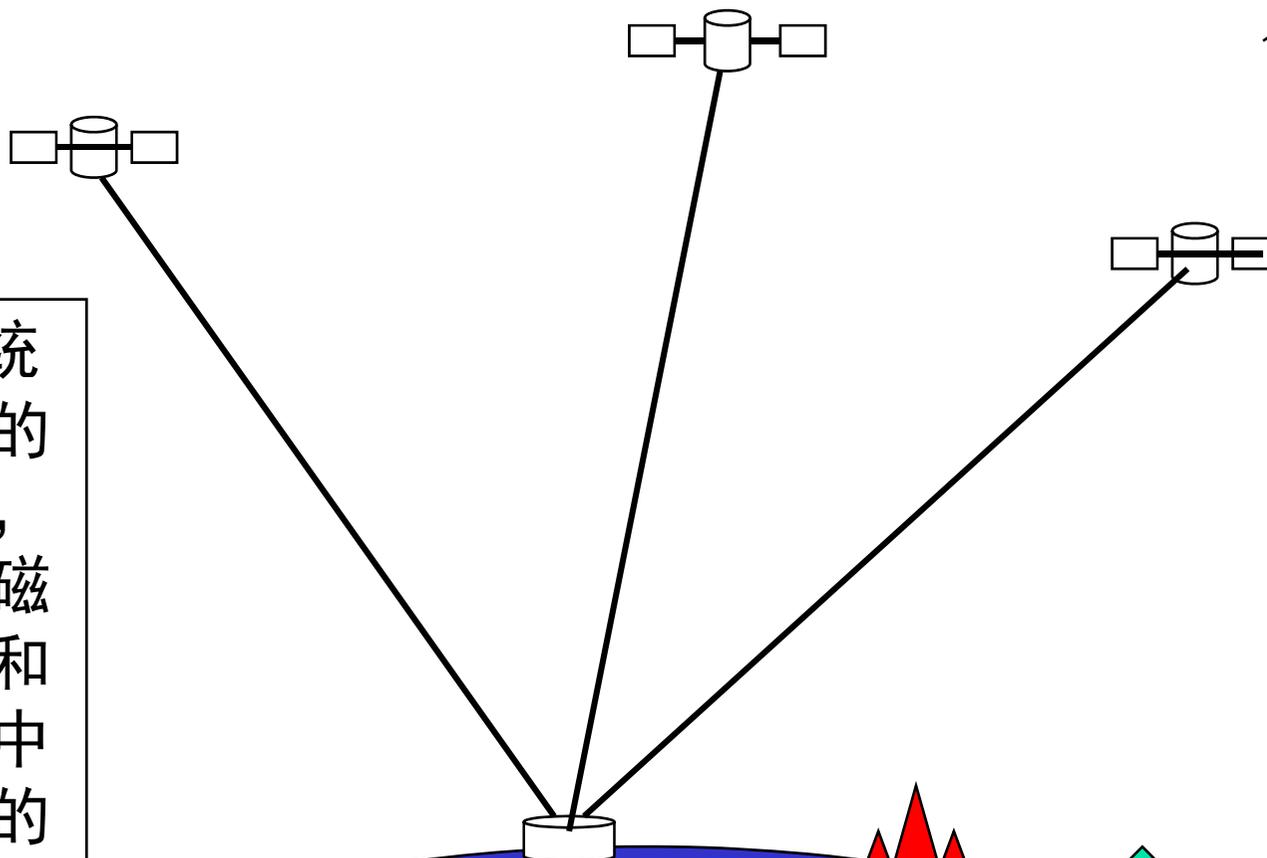
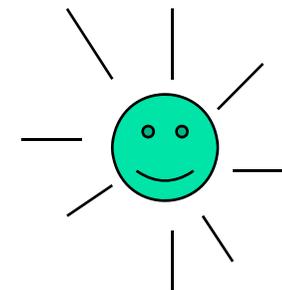
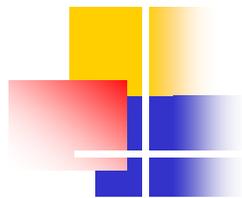


F22隐身战斗机

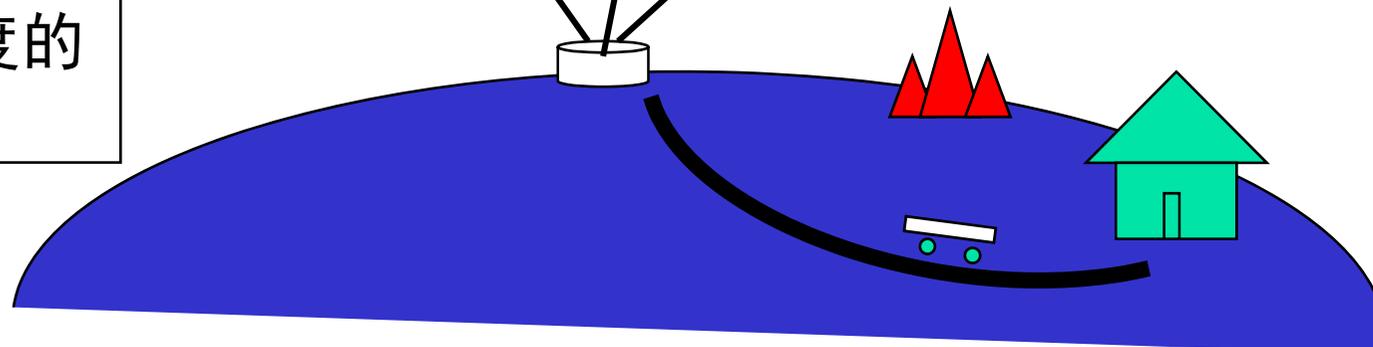
卫星信号通过电离层和大气层，信号波形将发生改变。因此卫星通信须考虑电离层和大气的影响，采取的相应的修正方法。

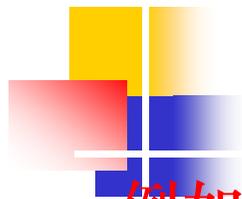


使卫星通信能够实现，选择什么样的载波信号传输的信息，必须考虑电离层和大气对电磁波的作用，选择那种适合卫星通信的频率，使得卫星通信能够正常进行



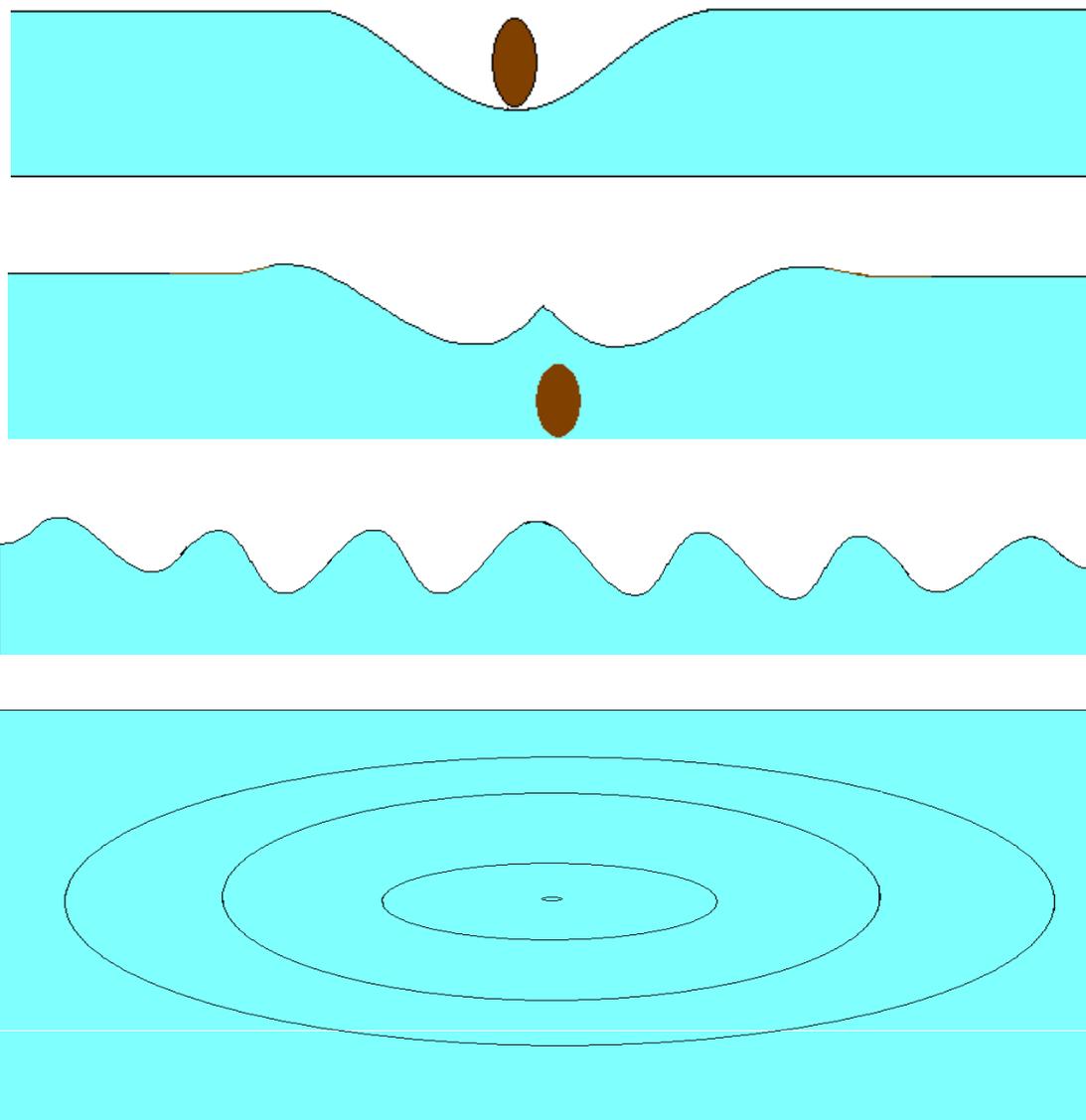
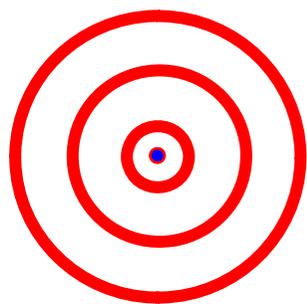
GPS定位系统
在确定目标的
精确位置时，
必须考虑电磁
波在电离层和
大气中传播中
波传播速度的
修正。

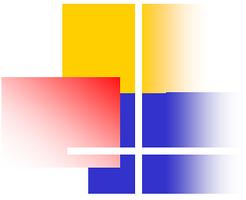




例如：水波

问题：一个点源所发射的电磁波的等相位面是什么样？





平面电磁波的概念

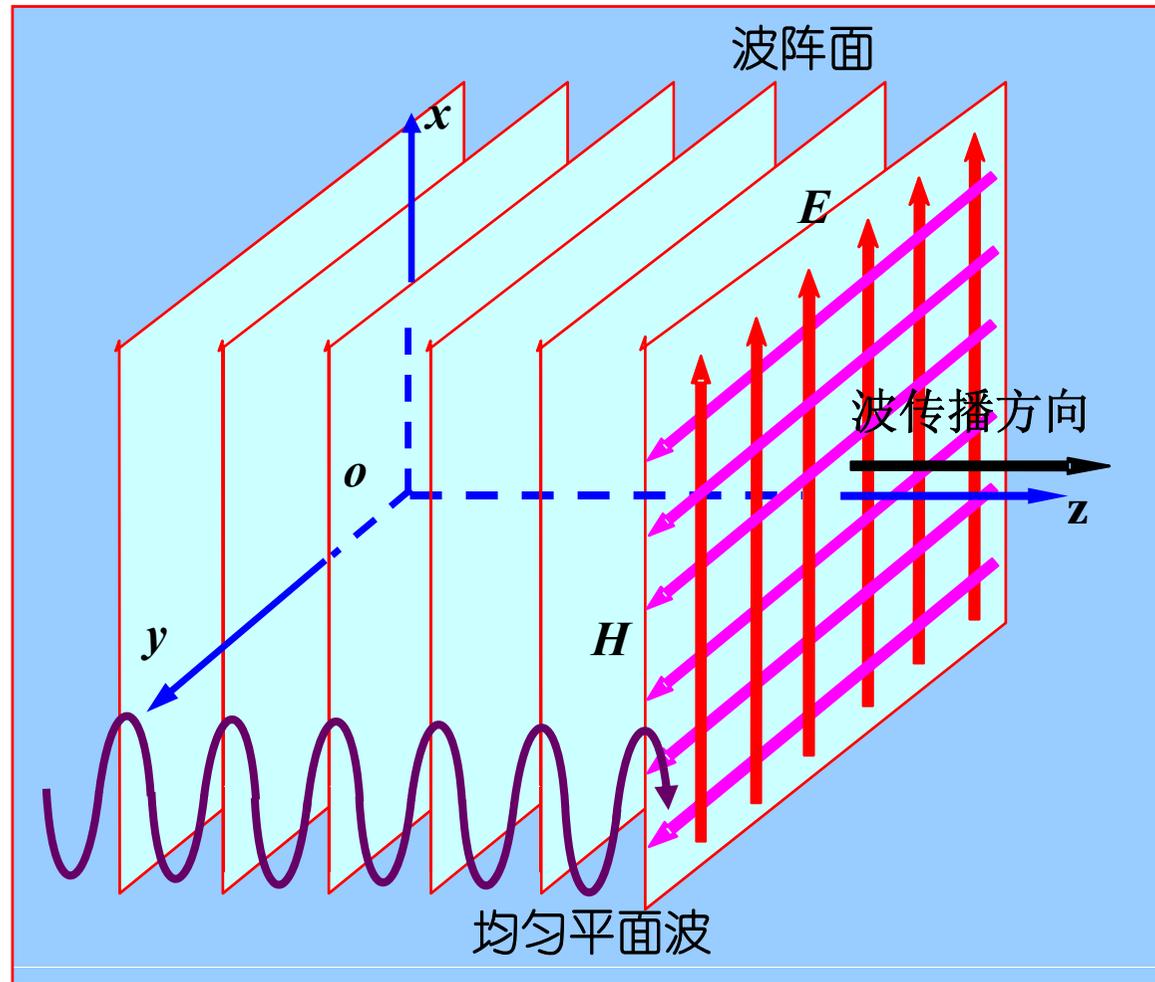
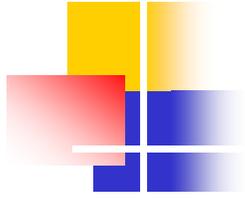
1. **等相位面**：在某一时刻，空间具有相同相位的点构成的面称为等相位面。等相位面又称为波阵面。

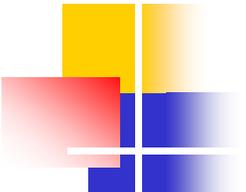
2. **球面波**：等相位面是球面的电磁波称为球面波。

3. **平面波**：等相位面是平面的电磁波称为平面电磁波。

4. **均匀平面波**：

任意时刻，如果在平面的等相位面上，每一点的电场强度均相同，这种电磁波称为均匀平面波。即等振幅面与等相位面重合的平面波。

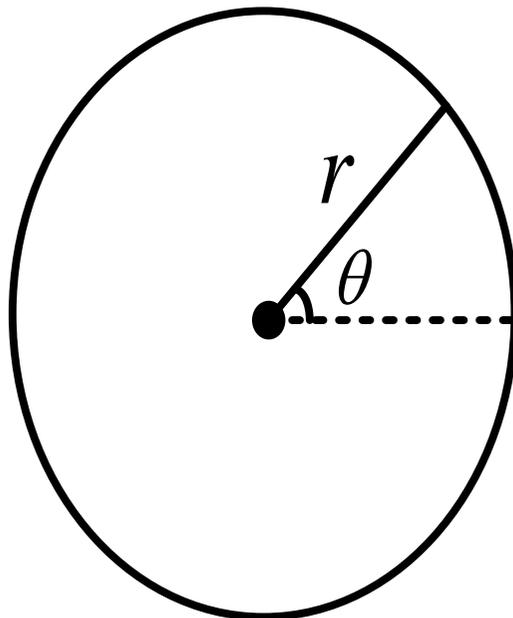




5.非均匀平面波:

等振幅面与等相位面不重合的平面波。

- ①平面波为实际问题的近似：例如天线辐射场。
- ②最简单形式的电磁波。



$$\frac{e^{-jkr}}{r} \text{ (球面波)}$$

r 很大, θ 很小时可视为平面波

§ 7.1 无损介质中的均匀平面波

理想介质： $\sigma=0$

电磁场：时谐场， $\omega \neq 0$

介质：线性均匀各向同性，即 μ ， ε 为实常数

场源：无源，即无外加场源， $\dot{\rho} = 0$ ， $\dot{J} = 0$

一、沿 $\pm z$ 方向传播的均匀平面波

考虑到是平面波，设平面波的等相位面为 $z=\text{常数}$ 的平面，由均匀平面波定义可知， $z=\text{常数}$ 的平面也是等振幅面，即平面波的振幅和相位只与 z 有关。

§ 7.1 无损介质中的均匀平面波

即 $\dot{\psi} = \psi_m(z)e^{jP(z)}$, $\psi \rightarrow$ 表示 \dot{E} , \dot{H} 的任一分量

$$\nabla \rightarrow \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad \left(\because \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} = 0 \right)$$

对 $\omega \neq 0$ 的时谐场, 仅考虑二个旋度方程即可

$$\begin{cases} \nabla \times \dot{H} = \dot{J}_f + j\omega \dot{D} \\ \nabla \times \dot{E} = -j\omega \dot{B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{z} \times \frac{\partial \dot{H}}{\partial z} = j\omega \epsilon \dot{E} & (1) \\ \hat{z} \times \frac{\partial \dot{E}}{\partial z} = -j\omega \mu \dot{H} & (2) \end{cases}$$

§ 7.1 无损介质中的均匀平面波

将 (2) 式代入 (1) 式可得

$$\hat{z} \times \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{z} \times \frac{\partial \dot{\mathbf{E}}}{\partial z} \right) = k^2 \dot{\mathbf{E}} \quad \text{其中 } k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \Rightarrow \hat{z} \times \hat{z} \times \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{E}}}{\partial z^2} = k^2 \dot{\mathbf{E}}$$

$$\Rightarrow \hat{z} \left(\hat{z} \cdot \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{E}}}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{E}}}{\partial z^2} = k^2 \dot{\mathbf{E}}$$

$$\text{令 } \dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_z + \dot{\mathbf{E}}_t \quad (\dot{\mathbf{E}}_t = \dot{E}_x \hat{x} + \dot{E}_y \hat{y} \text{ 为横向分量})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{E}}_z = 0 \\ \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{E}}_t}{\partial z^2} + k^2 \dot{\mathbf{E}}_t = 0 \end{cases}$$

§ 7.1 无损介质中的均匀平面波

把上式分解成 x, y 二个分量求解

$$\text{可得: } \begin{cases} \dot{E}_x = \dot{E}_{xm}^+ e^{-jkz} + \dot{E}_{xm}^- e^{jkz} \\ \dot{E}_y = \dot{E}_{ym}^+ e^{-jkz} + \dot{E}_{ym}^- e^{jkz} \end{cases}$$

$$\text{由 (2) 式可知: } \begin{cases} \dot{H}_y = \frac{1}{\eta} \dot{E}_{xm}^+ e^{-jkz} - \frac{1}{\eta} \dot{E}_{xm}^- e^{jkz} \\ \dot{H}_x = -\frac{1}{\eta} \dot{E}_{ym}^+ e^{-jkz} + \frac{1}{\eta} \dot{E}_{ym}^- e^{jkz} \end{cases}$$

$$\text{其中 } \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\omega\mu}{k} = \frac{k}{\omega\varepsilon}$$

§ 7.1 无损介质中的均匀平面波

其中的物理概念：

e^{-jkz} 项代表沿+z方向传播的平面波

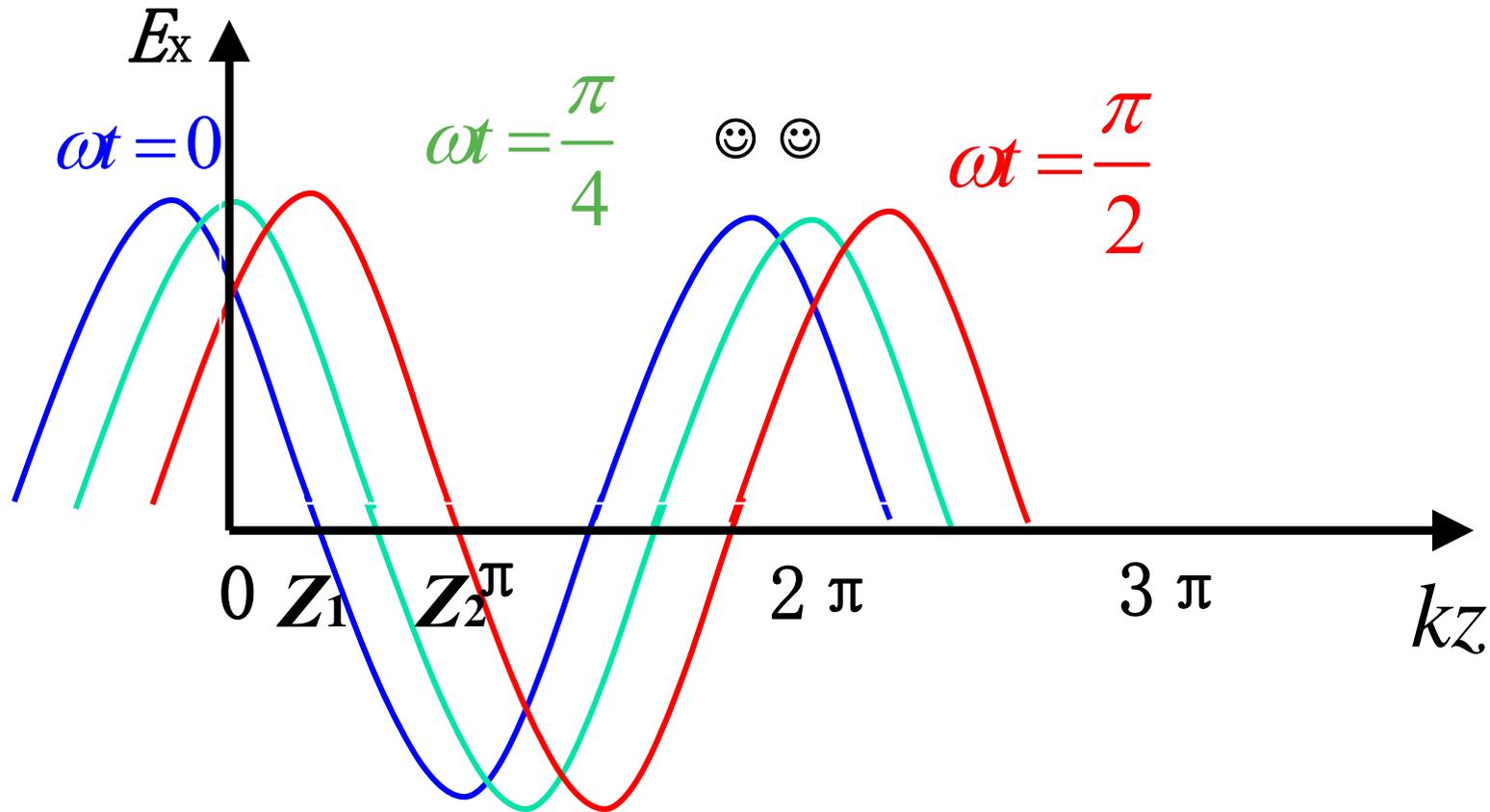
e^{jkz} 项代表沿-z方向传播的平面波

例： $\dot{E}_x^+ = \dot{E}_{xm}^+ e^{-jkz}$ 设 $\dot{E}_{xm}^+ = E_{xm}^+ e^{j\varphi_x^+}$ 其中 E_{xm}^+ 为实数

则 $E_x^+(z, t) = E_{xm}^+ \cos(\omega t - kz + \varphi_x^+)$

可见随z的增大， E_x^+ 的相位是滞后的，它代表沿+z方向传播的波。电磁波传播需要一定的时间，沿+z方向传播时，先达到 z_1 点，后达到 z_2 点，因此 z_2 点的状态总是滞后于 z_1 点的状态。

§ 7.1 无损介质中的均匀平面波



§ 7.1 无损介质中的均匀平面波

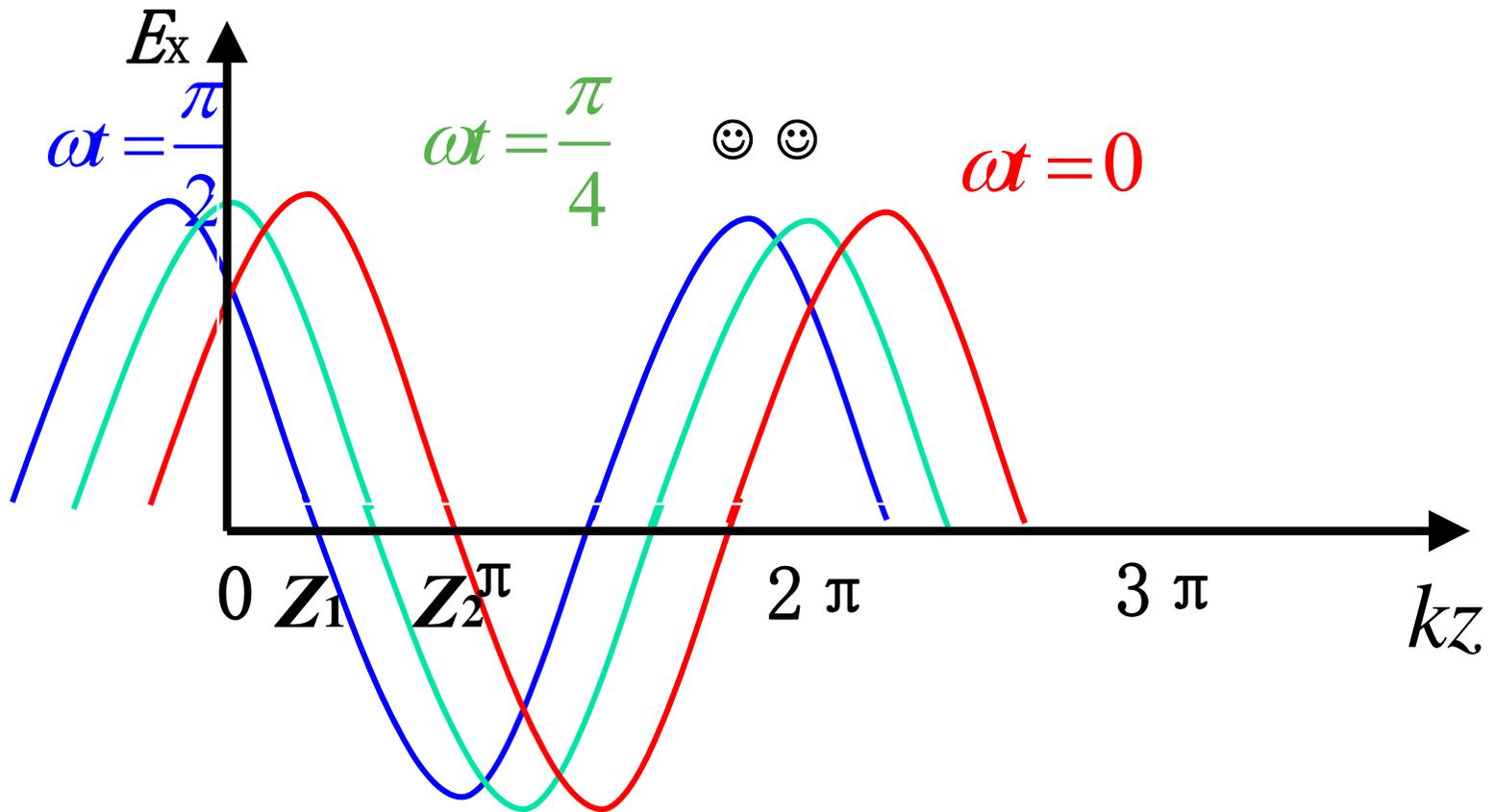
例： $\dot{E}_x^- = \dot{E}_{xm}^- e^{jkz}$ 设 $\dot{E}_{xm}^- = E_{xm}^- e^{j\varphi_x^-}$ 其中 E_{xm}^- 为实数

则 $E_x^-(z, t) = E_{xm}^- \cos(\omega t + kz + \varphi_x^-)$

可见随 z 的增大， E_x^- 的相位是超前的，但反过来看，当坐标沿 $-z$ 方向变化时，它的相位是滞后的，它代表沿 $-z$ 方向传播的波。当平面波沿 $-z$ 方向传播时，先达到 z_2 点，后达到 z_1 点，因此 z_1 点的状态总是滞后于 z_2 点的状态。

这样沿 z 方向传播的平面波可分解成二个波，一个沿 $+z$ 方向传播，一个沿 $-z$ 方向传播，这两个波均为行波。

§ 7.1 无损介质中的均匀平面波



§ 7.1 无损介质中的均匀平面波

角频率 ω :

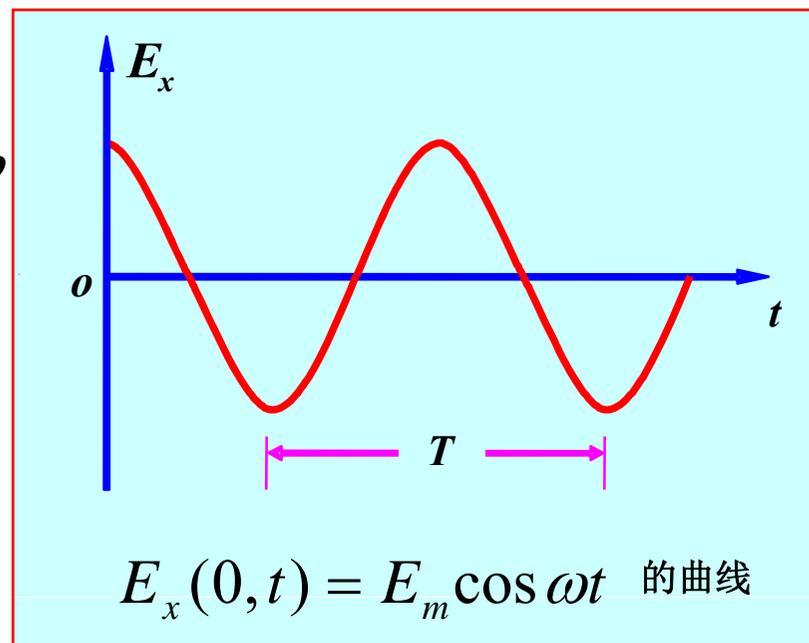
表示单位时间内的相位变化, 单位为rad/s

周期 T :

时间相位变化 2π 的时间间隔,



频率 f :



§ 7.1 无损介质中的均匀平面波

相位常数 k

由电场 $\dot{E}_x = \dot{E}_{xm}^+ e^{-jkz} + \dot{E}_{xm}^- e^{jkz}$ ，可见 k 反映的是随着波传播距离 z 的增加，波相位的变化情况。

所以定义：代表平面波在传播方向 ($\pm z$) 单位长度滞后的相位，称为平面波的相位（移）常数或传播常数。

$$k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{\lambda f} = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \text{又称为波数。}$$

其中 $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$ 为波的传播速度

§ 7.1 无损介质中的均匀平面波

波阻抗 η

η 称为平面波的波阻抗，代表电场强度的某一分量和与它垂直的磁场强度分量之比。

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{w\mu}{k} = \frac{k}{w\varepsilon}$$

$$\text{真空中 } \eta = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7}}{\frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}}} = 120\pi(\Omega)$$

§ 7.1 无损介质中的均匀平面波

相速 v_p

(平面波) 相速度 v_p : 等相位面的传播速度

t, z 点的状态 (也就是相位), 经过 Δt 时间后会传播到

$z + \Delta z$, 以 $+z$ 方向为例: $E_x^+(z, t) = E_{xm}^+ \cos(\omega t - kz + \varphi_x^+)$

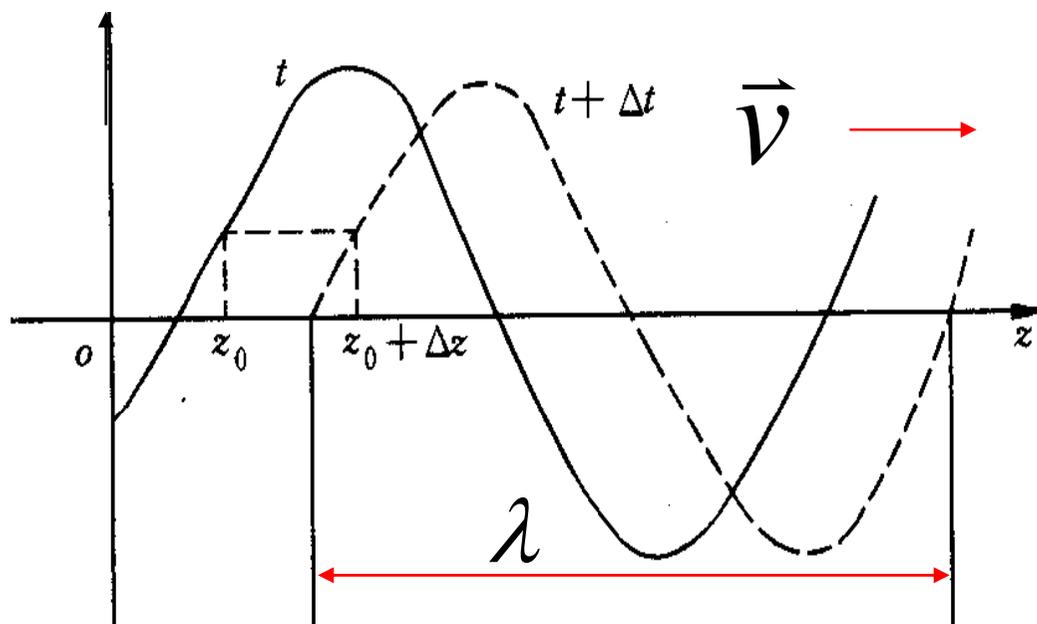
$$\omega t - kz + \varphi_x^+ = \omega(t + \Delta t) - k(z + \Delta z) + \varphi_x^+$$

$$\Rightarrow \omega \Delta t - k \Delta z = 0 \Rightarrow v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

$$\because C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \Rightarrow v_p = \frac{C}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

§ 7.1 无损介质中的均匀平面波

平面波的波长 λ

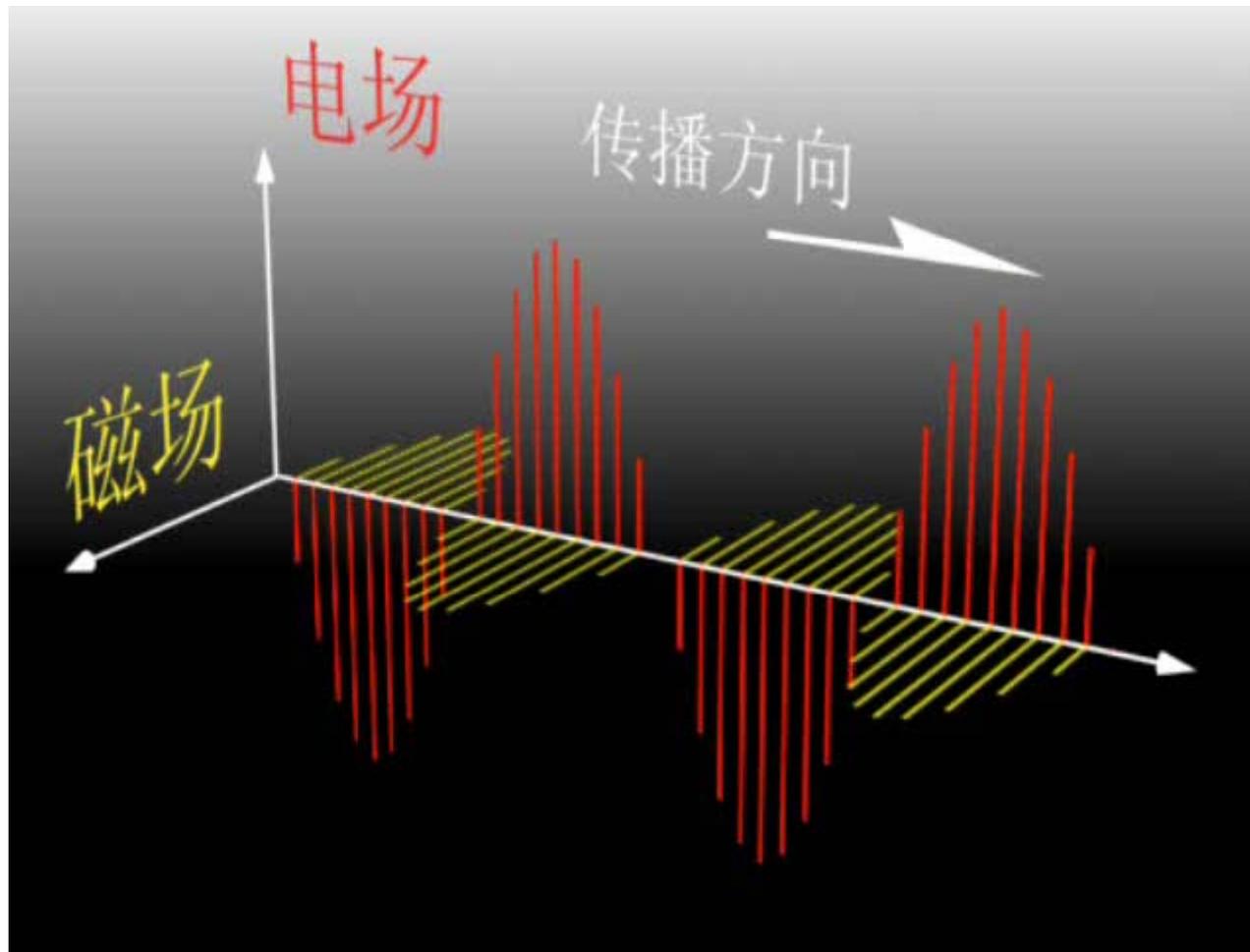


定义：一个时间周期内，等相位面的传播距离

$$\lambda = v_P T = \frac{v_P}{f} = \frac{2\pi}{k} = \frac{\omega}{k f}$$

因此也代表相位相差 2π 的相邻空间二点间的距离

§ 7.1 无损介质中的均匀平面波



§ 7.1 无损介质中的均匀平面波

平面波的特点：

①为横电磁波（TEM波）（Transverse Electromagnetic Wave）

沿传播方向（纵向）的电磁场分量 $\dot{E} = 0, \dot{H} = 0$

只有垂直于传播方向（横向）的电磁场分量

②每个行波的电场强度、磁场强度及传播方向的单位矢量相互垂直，且满足右手法则：

$$\dot{E}^+, \dot{H}^+, \hat{z}$$

$$\dot{E}^-, \dot{H}^-, -\hat{z}$$

§ 7.1 无损介质中的均匀平面波

电场强度的某一分量和与它垂直的磁场强度分量“同相位”（ $0, \pm\pi, \pm2\pi\cdots$ ），二者之比（瞬时值和复数值）为 $\pm\eta$ ，且当二者叉乘与传播方向相同时，取“+”号，反之取“-”号。

（注：电场强度或磁场强度的各个分量不一定同相位）

证：由 (1) (2) 式，并且 $\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \mp jk$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{z} \times \mp jk \dot{H}^{\pm} = j\omega\epsilon \dot{E}^{\pm} \\ \hat{z} \times \mp jk \dot{E}^{\pm} = -j\omega\mu \dot{H}^{\pm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{E}^{\pm} = \pm \frac{k}{\omega\epsilon} \dot{H}^{\pm} \times \hat{z} = \eta \dot{H}^{\pm} \times (\pm \hat{z}) \\ \dot{H}^{\pm} = \pm \frac{k}{\omega\mu} \hat{z} \times \dot{E}^{\pm} = \frac{1}{\eta} (\pm \hat{z}) \times \dot{E}^{\pm} \end{cases}$$

§ 7.1 无损介质中的均匀平面波

写成分量：

$$(+z \text{ 方向传播}) \dot{E}_x^+ / \dot{H}_y^+ = \eta$$

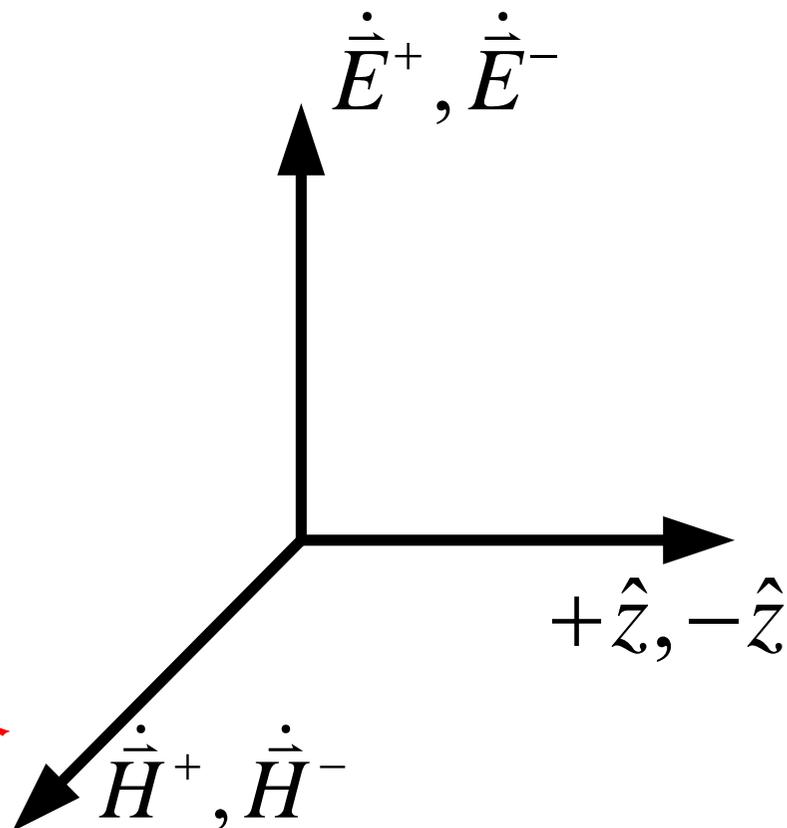
$$\dot{E}_y^+ / \dot{H}_x^+ = -\eta$$

$$(-z \text{ 方向传播}) \dot{E}_x^- / \dot{H}_y^- = -\eta$$

$$\dot{E}_y^- / \dot{H}_x^- = \eta$$

(1) 对复数值和瞬时值均成立

(2) 仅对每个行波成立，对合成场不一定成立



§ 7.1 无损介质中的均匀平面波

③每个行波的电场能量密度等于磁场能量密度（瞬时，平均），能量的传播方向即为波的传播方向

$$w_e^\pm = \frac{1}{2} \varepsilon |\bar{E}^\pm(z, t)|^2 = \frac{1}{2} \varepsilon |\eta \bar{H}^\pm(z, t) \times (\pm \hat{z})|^2$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon \eta^2 |\bar{H}^\pm(z, t)|^2 \stackrel{\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{=} \frac{1}{2} \mu |\bar{H}^\pm(z, t)|^2 = w_m^\pm$$

$$\bar{S}^\pm = \bar{E}^\pm \times \bar{H}^\pm = \bar{E}^\pm \times \frac{1}{\eta} (\pm \hat{z} \times \bar{E}^\pm)$$

$$= \pm \frac{1}{\eta} \left\{ \hat{z} (\bar{E}^\pm \cdot \bar{E}^\pm) - \bar{E}^\pm (\hat{z} \cdot \bar{E}^\pm) \right\} = \pm \frac{1}{\eta} |\bar{E}^\pm|^2 \hat{z} = \pm \eta |\bar{H}^\pm|^2 \hat{z}$$

§ 7.1 无损介质中的均匀平面波

例：已知自由空间中 $\vec{B} = 10^{-6} \cos(6\pi \times 10^8 t - 2\pi z)(\hat{x} + \hat{y})$ ，
试求：(1) f, λ, β 以及传播方向；(2) \vec{E} 的表达式
(3) \vec{S} 的表达式；(4) 若在 yoz 平面放置一半径为 R 的
圆环， P 为多少？

解：(1) 波沿 $+Z$ 轴方向传播； $\beta = 2\pi \text{ (rad/m)}$

$$\lambda = 2\pi / \beta = 1 \text{ (m)}, \quad f = \omega / 2\pi = 3 \times 10^8 \text{ (m/s)}$$

$$(2) \dot{\vec{H}} = \frac{1}{\mu_0} \dot{\vec{B}} = \frac{10^{-6}}{\mu_0} e^{-j2\pi Z} (\hat{x} + \hat{y}) \quad \eta_0 = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = -\frac{\dot{E}_y}{\dot{H}_x}$$

§ 7.1 无损介质中的均匀平面波

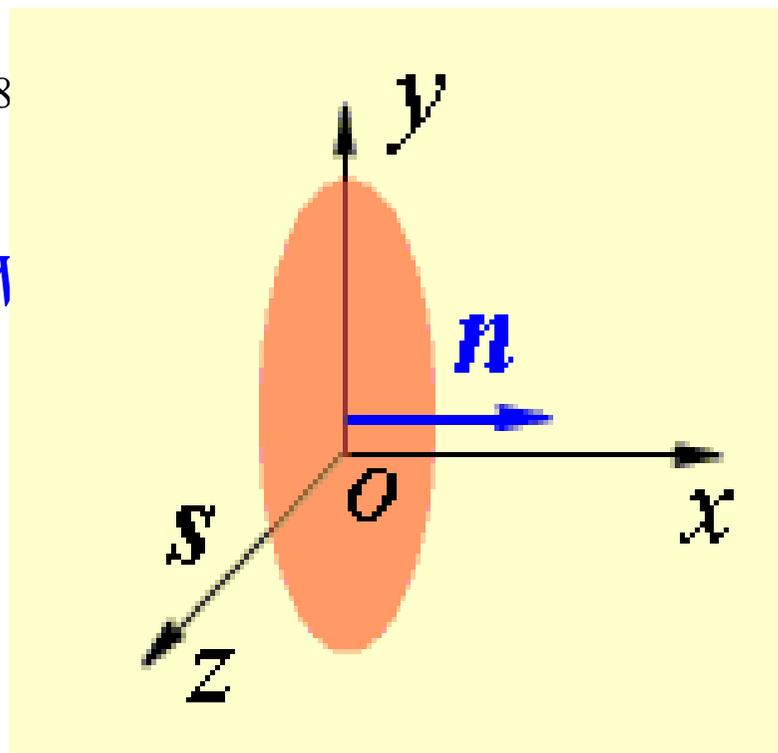
$$\dot{E}_y = -\eta_0 \dot{H}_x = -\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} (\dot{B}_x/\mu_0) = -v\dot{B}_x = -300e^{-j2\pi z}$$

$$\dot{E}_x = \eta_0 \dot{H}_y = v\dot{B}_y = 300e^{-j2\pi z}$$

$$\vec{E} = 300 \cos(6\pi \times 10^8 t - 2\pi z)(\hat{x} - \hat{y}) \quad (\text{V/m})$$

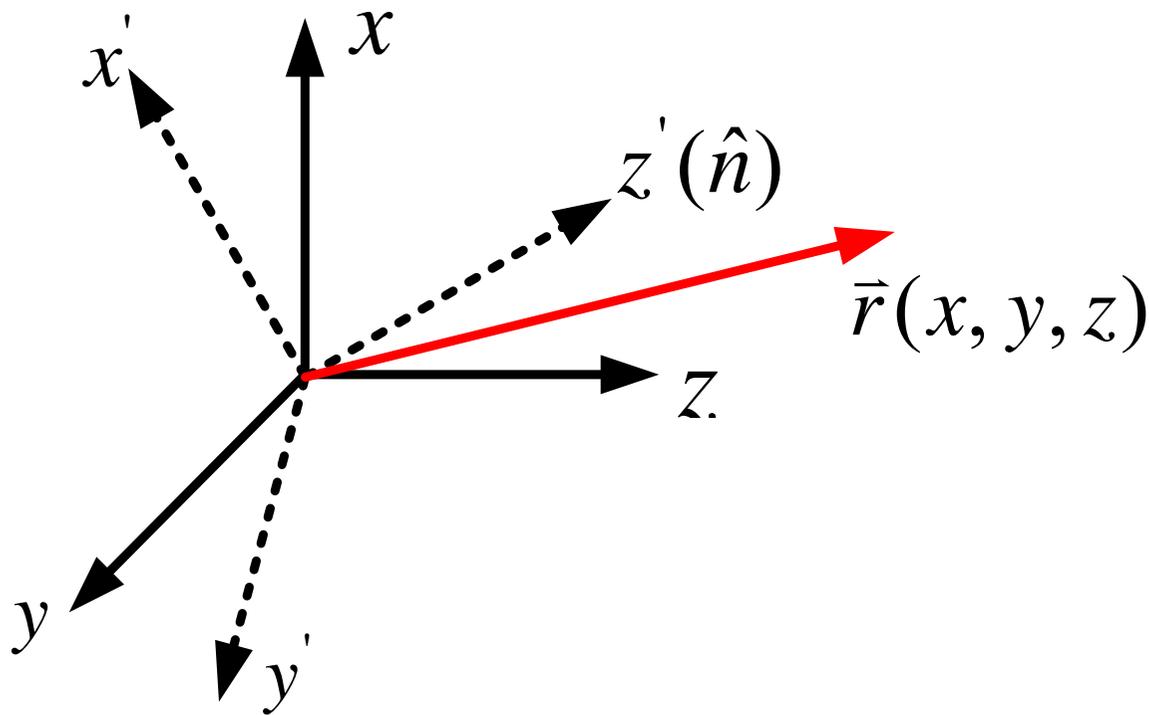
$$\begin{aligned} (3) \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} = \frac{300 \times 10^{-6}}{4\pi \times 10^{-7}} \cos^2(6\pi \times 10^8 t - 2\pi z) \hat{z} \\ &= 477.4 \cos^2(6\pi \times 10^8 t - 2\pi z) \hat{z} \quad (\text{W/m}^2) \end{aligned}$$

$$(4) P = \oint_s (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = 0$$



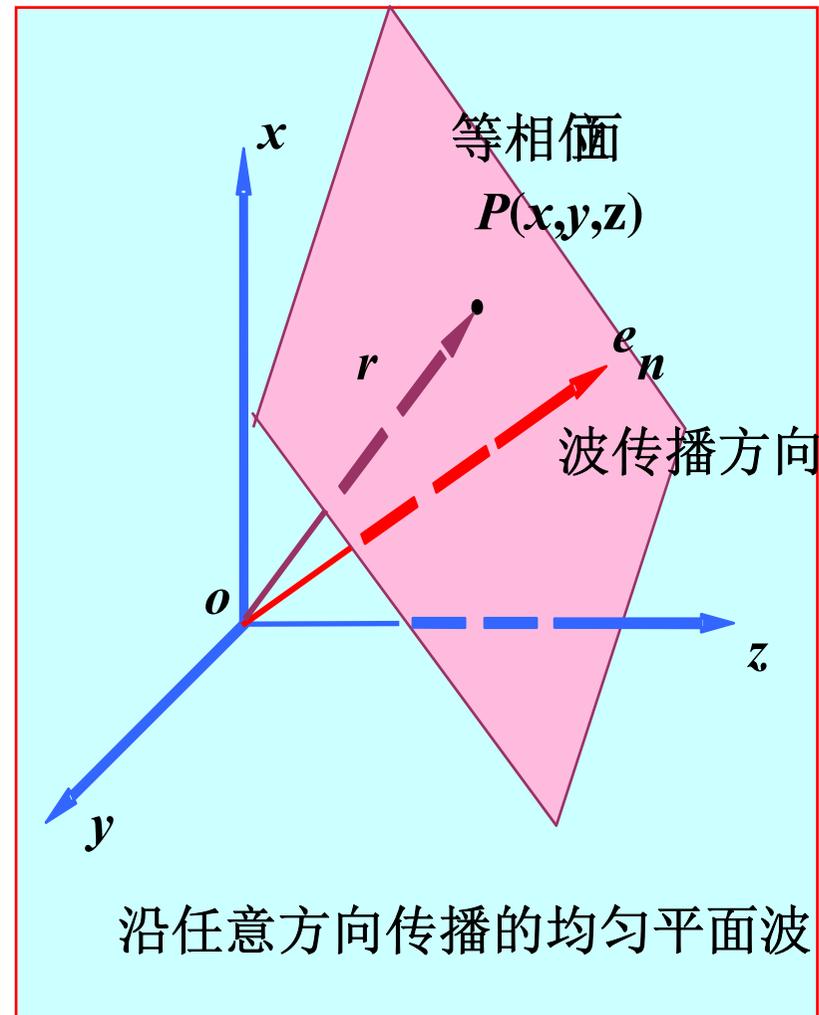
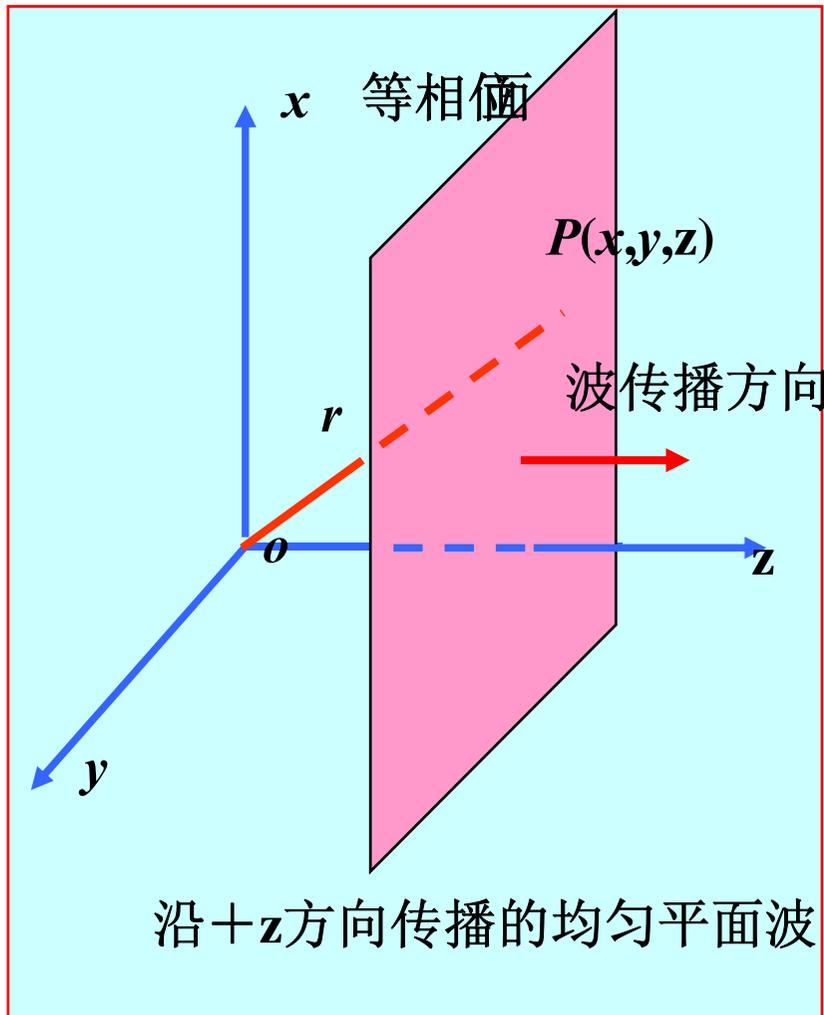
§ 7.1 无损介质中的均匀平面波

二、沿任意方向传播的均匀平面波



假定平面波的传播方向为 \vec{n} ，取 \vec{n} 方向为 z' 轴，则在 x', y', z' 坐标系中，前面的所有公式和结论均成立，平面波的等相位面垂直于 z' 轴，或者说垂直于 \vec{n} 方向。

§ 7.1 无损介质中的均匀平面波



§ 7.1 无损介质中的均匀平面波

所以其相位因子为 $e^{-jkz'}$ 其中 $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

现在我们变换到 x, y, z 坐标系, 设 \vec{r} 为观察点位置矢量, 则 $z' = \vec{r} \cdot \hat{n}$, 其中 \hat{n} 为 \vec{n} 方向的单位矢量。

定义: $\vec{k} = k\hat{n}$ 为传播常数

{ 方向: 代表平面波的传播方向
大小: 代表传播方向单位长度的相移

因此, 在 x, y, z 坐标系, 相位因子可写为 $e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$

$$\nabla e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} [-j\nabla(\vec{k} \cdot \vec{r})] = -j\vec{k}e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$\left(\text{利用 } \nabla \varphi(f(\vec{r})) = \frac{d\varphi}{df} \nabla f(\vec{r}) \right)$$

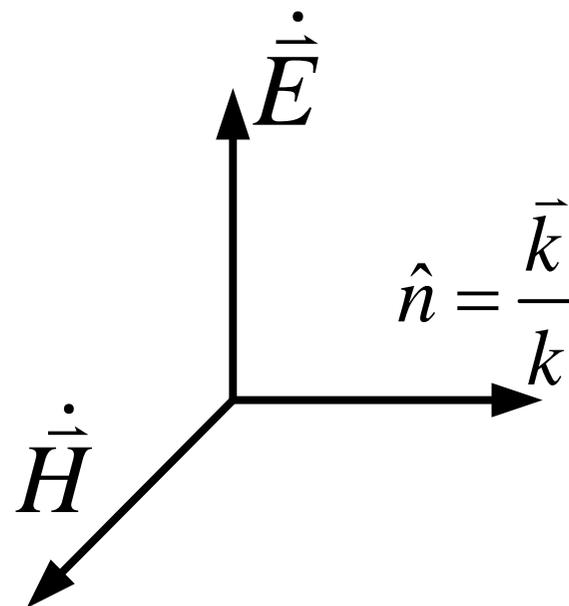
§ 7.1 无损介质中的均匀平面波

令 $\dot{\psi} = \psi_m e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ 为电磁场的某一分量

$$\Rightarrow \nabla \dot{\psi} = \psi_m \nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = -j\vec{k}\dot{\psi}$$

令 $\dot{\vec{A}} = \vec{A}_m e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ 为 $\dot{\vec{E}}$ 或 $\dot{\vec{H}}$ 矢量

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \dot{\vec{A}} = \vec{A}_m \cdot \nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = -j\vec{k}\dot{\vec{A}} \\ \text{(利用 } \nabla \cdot \vec{A}(f(\vec{r})) = \frac{d\vec{A}}{df} \cdot \nabla f(\vec{r})) \\ \nabla \times \dot{\vec{A}} = \nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \times \vec{A}_m = -j\vec{k} \times \dot{\vec{A}} \\ \text{(利用 } \nabla \times \vec{A}(f(\vec{r})) = -\frac{d\vec{A}}{df} \times \nabla f(\vec{r})) \end{array} \right.$$



总之，可有 $\nabla \rightarrow -j\vec{k}$ 的形式。

§ 7.1 无损介质中的均匀平面波

$$\therefore \begin{cases} \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}}_f + j\omega\epsilon\dot{\mathbf{E}} \\ \nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\dot{\mathbf{H}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -j\vec{k} \times \dot{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon\dot{\mathbf{E}} \Rightarrow \dot{\mathbf{E}} = \eta\dot{\mathbf{H}} \times \hat{n} \\ -j\vec{k} \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\dot{\mathbf{H}} \Rightarrow \dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\eta}\hat{n} \times \dot{\mathbf{E}} \end{cases}$$

上式为电磁场沿任意方向传播时电磁场的数量关系， $\pm z$ 方向或任意方向只是坐标系选择的问题，所以前面讨论的平面波的特点依然成立。平面波的特点是以此数量关系出发求得的。

§ 7.1 无损介质中的均匀平面波

例：在介质 ($\mu = \mu_0, \varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$) 中沿 y 方向传播的均匀平面波电场强度为 $\vec{E} = 377 \cos(10^9 t - 5y) \hat{z} \text{ V/m}$ ，求

(1) 相对介电常数； (2) 传播速度； (3) 波阻抗； (4) 波长； (5) 磁场强度； (6) 电场强度和磁场强度的复数表示形式； (7) 波的平均功率密度

解 (1) 相对介电常数

由电场强度 \vec{E} 的表达式： $\omega = 10^9 \text{ rad/s}$, $k = 5 \text{ rad/m}$

$$k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$\longrightarrow \varepsilon_r = \frac{25 \times 10^{-18}}{\mu_0 \varepsilon_0} = 25 \times 10^{-18} \times (3 \times 10^8)^2 = 2.25$$

§ 7.1 无损介质中的均匀平面波

(2) 传播速度为

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{10^9}{5} \text{ m/s} = 2 \times 10^8 \text{ m/s}$$

(3) 波阻抗为 $\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} = \frac{120\pi}{\sqrt{2.25}} \Omega = 251.33 \Omega$

(4) 波长为 $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{5} \text{ m} = 1.257 \text{ m}$

§ 7.1 无损介质中的均匀平面波

(5) 根据均匀平面波的电场、磁场和传播方向满足右手螺旋法则的规律，及电场强度和磁场强度的关系，可得

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta} \hat{y} \times \vec{E} = 1.5 \cos(10^9 t - 5y) \hat{x} \quad \text{A/m}$$

(6) 电场强度和磁场强度的复数形式为

$$\vec{E} = 377 \cos(10^9 t - 5y) \hat{z} \quad \text{V/m} \longrightarrow \dot{\vec{E}} = 377 e^{-j5y} \hat{z} \quad \text{V/m}$$

$$\vec{H} = 1.5 \cos(10^9 t - 5y) \hat{x} \quad \text{A/m} \longrightarrow \dot{\vec{H}} = 1.5 e^{-j5y} \hat{x} \quad \text{A/m}$$

§ 7.1 无损介质中的均匀平面波

(7) 媒质中的平均功率密度是

$$\bar{\vec{S}} = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*]$$

$$\vec{H}^* = 1.5 e^{j5y} \hat{x} \quad \text{A/m}$$

$$\bar{\vec{S}} = \frac{1}{2} \times 377 \times 1.5 [\hat{z} \times \hat{x}] = 282.75 \hat{y} \quad \text{W/m}^2$$

§ 7.2 有损介质中的均匀平面波

$\sigma \neq 0$; ε, μ 为常数

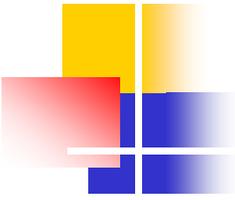
对 $\omega \neq 0$ 的时谐场，仅考虑二个旋度方程即可

$$\begin{cases} \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}}_f + j\omega\varepsilon\dot{\mathbf{E}} = \sigma\dot{\mathbf{E}} + j\omega\varepsilon\dot{\mathbf{E}} = j\omega\varepsilon_k\dot{\mathbf{E}} \\ \nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\dot{\mathbf{H}} \end{cases}$$

其中 $\varepsilon_k = \varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega} = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$ → 称为等效复介电常数

也就是说介电常数为 ε ，导电率为 σ ，磁导率为 μ 的介质，可以用复介电常数为 ε_k 和磁导率为 μ 的介质来代替，

$$\text{即 } (\varepsilon, \mu, \sigma) \Leftrightarrow (\varepsilon_k, \mu)$$



§ 7.2 有损介质中的均匀平面波

从数学角度来说效果是相同的。用复介电常数代替后，麦氏方程和前面无损介质中的麦氏方程形式上完全相同，因此前面推导的公式都可以用，

只要作 $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_k$ 替换即可。

注意：虽然数量关系形式上相同，但各个量的含义不再完全相同，因为前面的介电常数为实数。

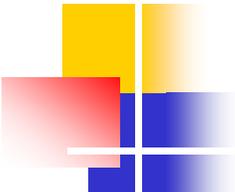
§ 7.2 有损介质中的均匀平面波

设平面波沿 $\pm z$ 方向传播

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon_k} \quad \epsilon_k = \epsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)$$

$$\text{令 } k = \beta - j\alpha \quad (\beta > 0, \alpha > 0)$$

$\left(\begin{array}{l} \because \text{当 } +z \text{ 方向传播: } e^{-jkz} = e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}, \text{ 在 } +z \text{ 方向相位应延迟,} \\ \text{振幅衰减,} \quad \Rightarrow \beta > 0, \alpha > 0 \\ \text{当 } -z \text{ 方向传播: } e^{jkz} = e^{\alpha z} e^{j\beta z}, \text{ 在 } -z \text{ 方向相位应延迟,} \\ \text{振幅衰减,} \quad \Rightarrow \beta > 0, \alpha > 0 \end{array} \right)$



§ 7.2 有损介质中的均匀平面波

定义:

$\beta \rightarrow$ (有损介质中平面波的) **相位常数** (代表单位长度上的位移)

$\alpha \rightarrow$ (平面波的) **衰减常数**, 描述平面波在有损介质中传播方向振幅的衰减特性 (若平面波传播单位长度, 则振幅衰减到原来的 $\frac{1}{e^\alpha}$)

$\delta = \frac{1}{\alpha} \rightarrow$ **衰减长度**, 即振幅衰减到原来的 $\frac{1}{e}$ 时, 平面波的传播距离

§ 7.2 有损介质中的均匀平面波

$$\therefore k^2 = \beta^2 - \alpha^2 - 2j\beta\alpha = \omega^2 \mu \epsilon_k = \omega^2 \mu \epsilon - j\omega \mu \sigma$$

上式实部和虚部分别相等 \Rightarrow
$$\begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \mu \epsilon \\ 2\beta\alpha = \omega \mu \sigma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \beta = \sqrt{\frac{\omega^2 \mu \epsilon + \sqrt{\omega^4 \mu^2 \epsilon^2 + \omega^2 \mu^2 \sigma^2}}{2}}$$

$$= \beta_0 \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2}}{2}} > \beta_0$$

其中 $\beta_0 = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$ 为无损时的相位常数（注意不是真空时）。

§ 7.2 有损介质中的均匀平面波

$$\Rightarrow \alpha = \frac{w\mu\sigma}{2\beta} = \beta_0 \frac{\frac{\sigma}{w\epsilon}}{\left[2 + 2\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{w\epsilon}\right)^2}\right]^{1/2}} \quad (\text{若 } \sigma=0, \text{ 则 } \alpha=0)$$

相速度: $v_P = \frac{w}{\beta} = v_{P0} \frac{2}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{w\epsilon}\right)^2}}} < v_{P0}$

其中 $v_{P0} = \frac{w}{\beta_0}$ 为无损时的相速度

波长: $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \lambda_0 \frac{2}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{w\epsilon}\right)^2}}} < \lambda_0$ 其中 $\lambda_0 = \frac{2\pi}{\beta_0}$ 为无损时的波长

§ 7.2 有损介质中的均匀平面波

波阻抗:
$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_k}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}} = \eta_0 \sqrt{\frac{1}{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}}$$

其中 $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ 为无损时的波阻抗

公式中均有 $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ 这项, 它代表什么?

∴ 传导电流为 $\sigma\dot{E}$, 位移电流为 $j\omega\epsilon\dot{E}$

∴ $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ 这项代表了 **传导电流与位移电流幅度大小之比** (不考虑相位)

§ 7.2 有损介质中的均匀平面波

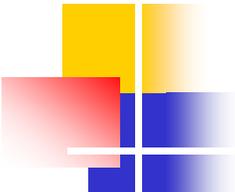
介质的分类

$$\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) = \begin{cases} \ll 1 & \left[\text{传导电流远小于位移电流} \right] & \text{弱导电介质} \\ \sim 1 & \left[\text{传导电流远接近位移电流} \right] & \text{半导体} \\ \gg 1 & \left[\text{传导电流远大于位移电流} \right] & \text{良导体介质} \end{cases}$$

(1) 弱导电介质: $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \ll 1$, 即传导电流比较小, 位移电流

比较大

$$\therefore \beta \approx \beta_0 \sqrt{\frac{1+1+\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}{2}} \approx \beta_0 \left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right] \approx \beta_0$$



§ 7.2 有损介质中的均匀平面波

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \beta_0 \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \approx \frac{1}{2} \eta_0 \sigma \qquad \eta \approx \eta_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{j\sigma}{\omega \varepsilon}\right) \approx \eta_0$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$$

在低损耗媒质中的相位常数和相速与无耗介质中的近似相同。但确实存在衰减，而且电场强度和磁场强度存在微小的相位差。

§ 7.2 有损介质中的均匀平面波

(2) 良导体电介质 $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$

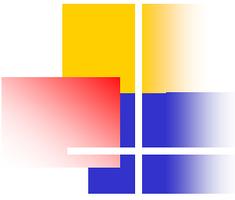
$$\beta \approx \beta_0 \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f \mu \sigma} \quad \alpha \approx \beta_0 \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\epsilon}} = \beta$$

$$\eta \approx \eta_0 \sqrt{\frac{j\omega\epsilon}{\sigma}} = (1+j) \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} = R_s + jX_s$$

其中 R_s 称为表面电阻, X_s 称为表面电抗

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$$

可见随着频率增加, 衰减常数变大。



§ 7.2 有损介质中的均匀平面波

此时衰减长度 $\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$ 在良导体中通常称为趋肤

深度，反映了平面波需要多大距离则可衰减近似为0

趋肤效应： 高频条件下，良导体中的电流绝大部分集中在导体表面附近，这种现象称为趋肤效应。

电磁屏蔽原理： 根据趋肤效应，利用一定厚度的导体板作成屏蔽罩，将电子设备保护起来。

§ 7.2 有损介质中的均匀平面波

良导体的表面电阻 R_s

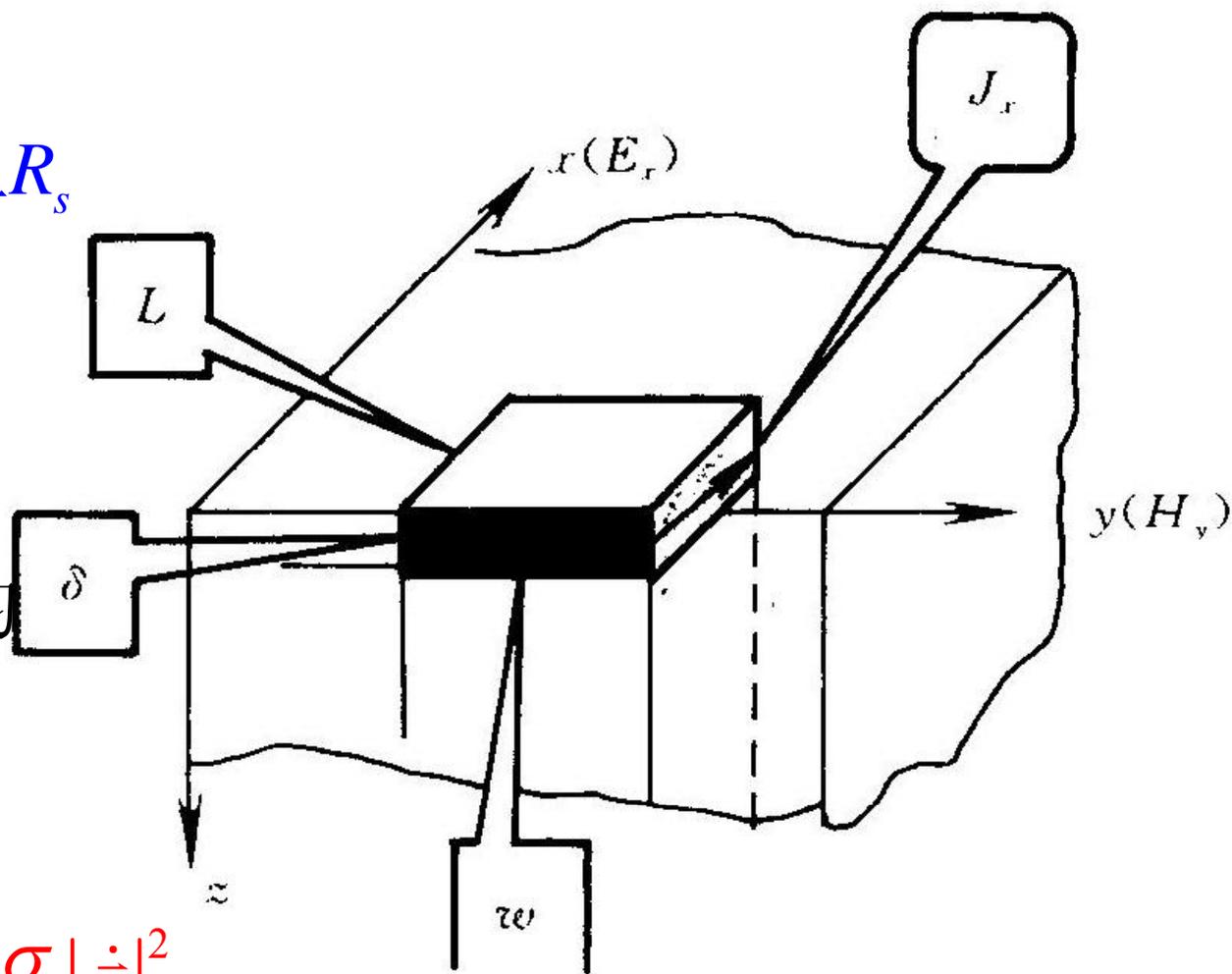
$$\text{设 } \dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z},$$

$$\text{其中 } \dot{\vec{E}}_0 = \dot{\vec{E}} \Big|_{z=0}$$

则良导体中的平均
热损耗功率密度:

$$\bar{p} = \text{Re}(\dot{p})$$

$$= \text{Re} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{E}} \cdot \dot{\vec{J}}^* \right) = \frac{\sigma}{2} |\dot{\vec{E}}|^2$$



§ 7.2 有损介质中的均匀平面波

良导体表面单位面积以内功率为

$$\bar{P} = \int_0^{\infty} \frac{\sigma}{2} |\dot{\vec{E}}|^2 dz = \int_0^{\infty} \frac{\sigma}{2} |\dot{\vec{E}}_0|^2 e^{-2\alpha z} dz = \frac{\sigma}{4\alpha} |\dot{\vec{E}}_0|^2$$

由于趋肤效应，其实损耗几乎集中在表面相当薄的一层，故相应的体电流等效为面电流，电阻等效为面电阻。

∴良导体表面单位面积以内的等效面电流密度为

$$\dot{\vec{J}}_s \triangleq \int_0^{\infty} \dot{\vec{J}} dz = \int_0^{\infty} \sigma \dot{\vec{E}}_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} dz = \frac{\sigma \dot{\vec{E}}_0}{\alpha + j\beta} \approx \frac{\dot{\vec{E}}_0}{\eta}$$

$$\left(\because \frac{\alpha + j\beta}{\sigma} \approx \frac{(1+j)\beta}{\sigma} \approx (1+j) \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} \approx \eta \right)$$

§ 7.2 有损介质中的均匀平面波

$$\therefore \bar{P} = \frac{\sigma}{4\alpha} |\dot{E}_0|^2 = \frac{\sigma}{4\alpha} |\eta|^2 |\dot{J}_s|^2 \triangleq \frac{1}{2} R_s |\dot{J}_s|^2$$

$$\therefore R_s = \frac{\sigma}{2\alpha} |\eta|^2 = \frac{\alpha}{\sigma} = \frac{1}{\delta\sigma} = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}}$$

$$\left(\text{利用 } \frac{\sigma}{2\alpha} \frac{2\pi f \mu}{\sigma} = \frac{\alpha^2}{\alpha\sigma} = \frac{\alpha}{\sigma} = \frac{\pi f \mu}{\alpha} = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}} = \frac{1}{\delta\sigma} \right)$$

当 $\sigma \rightarrow \infty$, $\dot{J}_s \rightarrow$ 理想导体的表面电流

§ 7.2 有损介质中的均匀平面波

【例】计算频率100Hz, 1MHz, 10GHz的电磁波在金属铜中的穿透深度。

解：金属铜的电导率 $\sigma = 5.8 \times 10^7 / \text{欧} \cdot \text{米}$

$$\delta_1 = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi \times 100 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7}} = 6.6(\text{mm})$$

$$\delta_2 = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi \times 100 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7}} = 66(\mu\text{m})$$

$$\delta_3 = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi \times 100 \times 10^{10} \times 4\pi \times 10^{-7} \times 5.8 \times 10^7}} = 6600(\text{A})$$

§ 7.2 有损介质中的均匀平面波

有损介质中平面波的特点：

① 仍为横电磁波（TEM波）（Transverse Electromagnetic Wave）

沿传播方向（纵向）的电磁场分量 $\dot{E} = 0, \dot{H} = 0$

只有垂直于传播方向（横向）的电磁场分量

② 每个行波的电场强度、磁场强度及传播方向的单位矢量相

互垂直，且满足右手法则：

$$\begin{cases} \dot{E}^{\pm} = \eta \dot{H}^{\pm} \times (\pm \hat{z}) \\ \dot{H}^{\pm} = \frac{1}{\eta} (\pm \hat{z}) \times \dot{E}^{\pm} \end{cases}$$

§ 7.2 有损介质中的均匀平面波

电场强度的某一分量和与它垂直的磁场强度分量的复数值之比为 $\pm\eta$ ，正负号规则与无损时相同，但电场强度和磁场强度的相位不再相同，瞬时值之比与时间有关，相对于时间这个变量来说不再是一个常数。

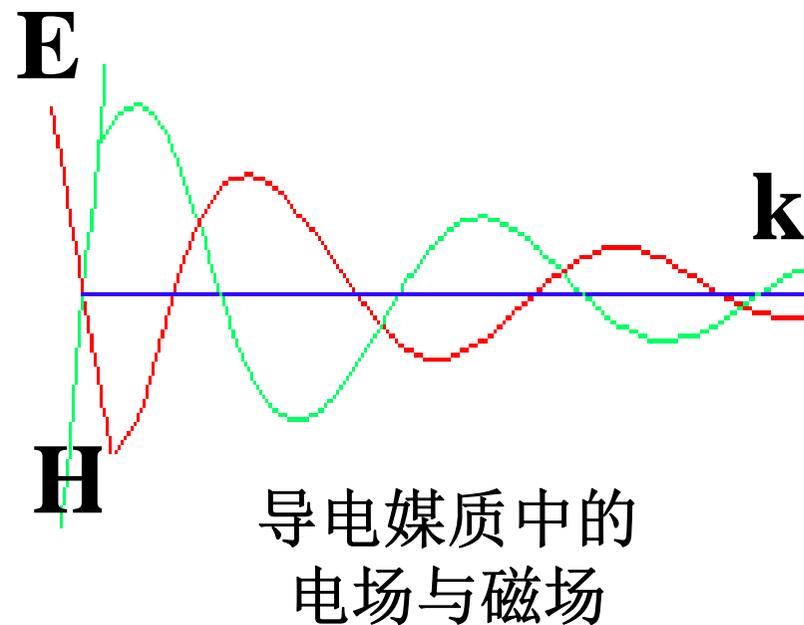
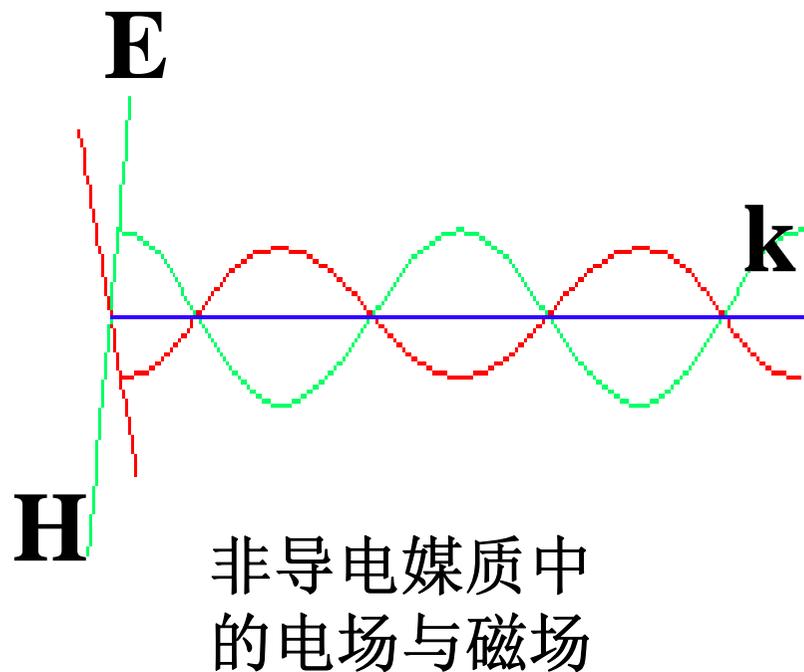
若设电场强度为 $\dot{\vec{E}} = \dot{E}_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \hat{x}$,

则其相对应的磁场强度 $\dot{\vec{H}} = \frac{\dot{E}_0}{\eta} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \hat{y}$,

$\because \eta$ 为复数，设 $\eta = |\eta| e^{i\theta_\eta} \Rightarrow \dot{\vec{H}} = \frac{\dot{E}_0}{|\eta|} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-i\theta_\eta} \hat{y}$

§ 7.2 有损介质中的均匀平面波

- (1) 电场强度和磁场强度的振幅以 $e^{-\alpha z}$ 因子衰减
- (2) 电场相位超前磁场相位 θ_η



§ 7.2 有损介质中的均匀平面波

③ 电场的储能不再等于磁场的储能 $\frac{\overline{w_e}}{w_m} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}}$ ，每个行波

能量的传播方向仍为波的传播方向（一个周期平均）

$$\text{证: } \begin{cases} \dot{\vec{E}}^\pm = \eta \dot{\vec{H}}^\pm \times (\pm \hat{z}) \\ \dot{\vec{H}}^\pm = \frac{1}{\eta} (\pm \hat{z}) \times \dot{\vec{E}}^\pm \end{cases} \quad \text{设 } \eta = |\eta| e^{i\omega t_\eta} \quad (t_\eta > 0)$$

$$\begin{cases} \vec{E}^\pm(z, t) = |\eta| \vec{H}^\pm(z, t + t_\eta) \times (\pm \hat{z}) \\ \vec{H}^\pm(z, t) = \frac{1}{|\eta|} (\pm \hat{z}) \times \vec{E}^\pm(z, t - t_\eta) \end{cases}$$

§ 7.2 有损介质中的均匀平面波

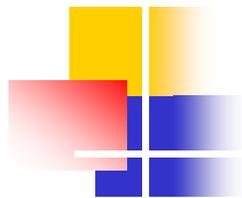
$$\begin{aligned}\Rightarrow \bar{S}^{\pm} &= \bar{E}^{\pm} \times \bar{H}^{\pm} = |\eta| \left[\bar{H}^{\pm}(z, t + t_{\eta}) \times (\pm \hat{z}) \right] \times \bar{H}^{\pm}(z, t) \\ &= |\eta| \left[\bar{H}^{\pm}(z, t + t_{\eta}) \cdot \bar{H}^{\pm}(z, t) \right] (\pm \hat{z}) \\ &= |\eta|^{-1} \left[\bar{E}^{\pm}(z, t - t_{\eta}) \cdot \bar{E}^{\pm}(z, t) \right] (\pm \hat{z})\end{aligned}$$

$$\dot{S}^{\pm} = \frac{1}{2} \dot{E}^{\pm} \times \dot{H}^{\pm*} = \frac{1}{2} \eta \left[\dot{H}^{\pm} \times (\pm \hat{z}) \right] \times \dot{H}^{\pm*} = \frac{1}{2} \eta \left| \dot{E}^{\pm} \right|^2 (\pm \hat{z})$$

$$\bar{S}^{\pm} = \text{Re}[\dot{S}^{\pm}] = \frac{1}{2} \text{Re}(\eta) \left| \dot{H}^{\pm} \right|^2 (\pm \hat{z}) = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{1}{\eta^*} \right) \left| \dot{E}^{\pm} \right|^2 (\pm \hat{z})$$

$$\text{Re}(\eta) > 0, \text{Re} \left(\frac{1}{\eta^*} \right) > 0$$

可见能流密度的瞬时值在部分时刻有可能和传播方向相反，但一个周期的平均效果来看，能流密度的方向与传播方向一致。



§ 7.3 均匀平面波的极化

(考虑z方向)

极化的定义：指空间的某一点的（总）电场强度矢量 \vec{E}
(或磁场强度 \vec{H}) 随时间变化的方式。

通常用 \vec{E} (或 \vec{H}) 矢量端点随时间变化的轨迹来描述。

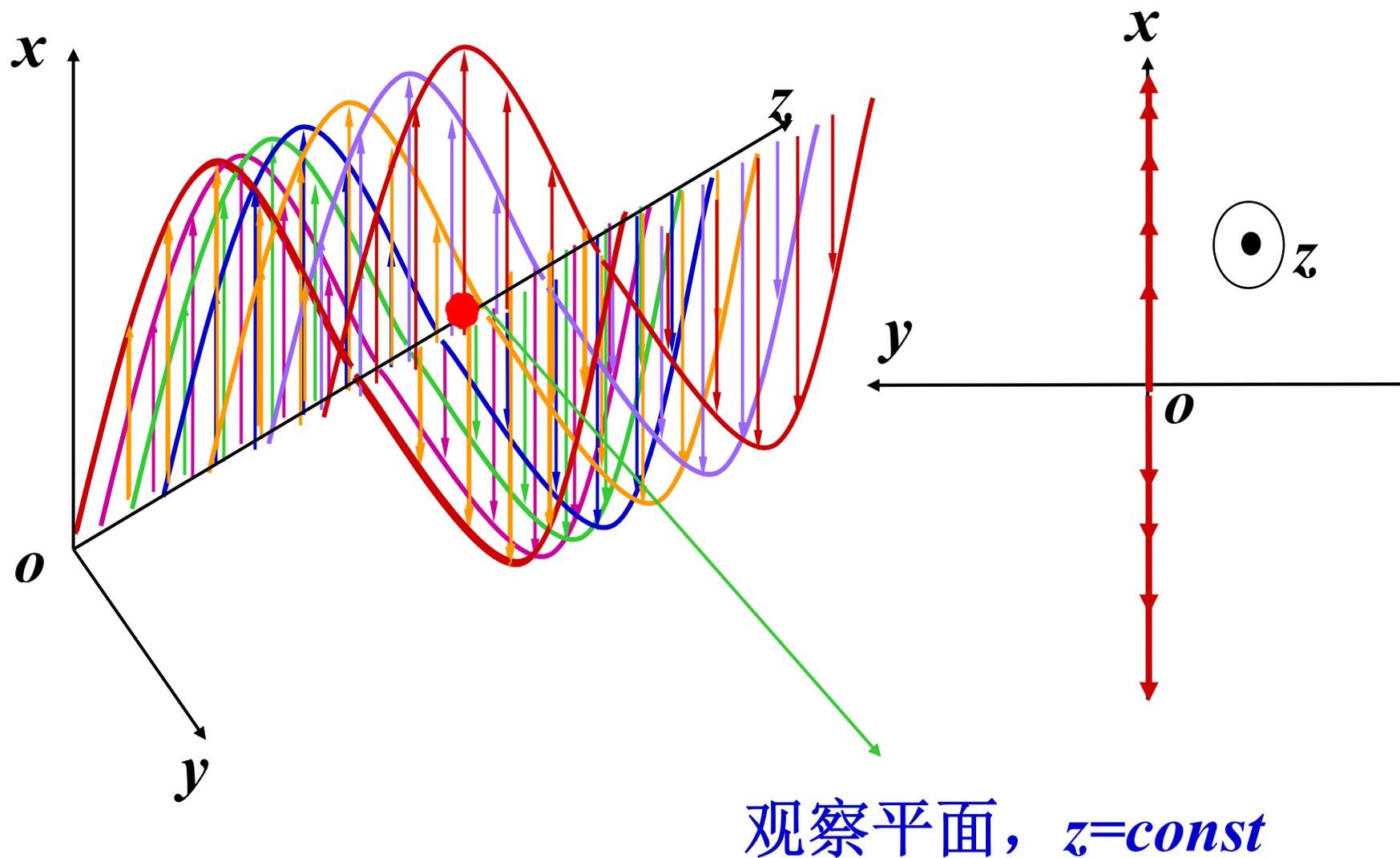
可分为：线极化、圆极化、椭圆极化三种

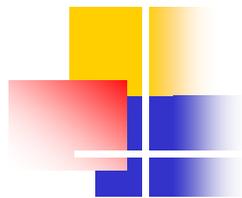
考虑沿+z方向传播的平面波（若任意方向，则可选此方向为+z方向讨论依然有效）

$$+z\text{方向: } \vec{E}(z, t) = E_x(z, t)\hat{x} + E_y(z, t)\hat{y}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_x = E_{xm} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) & E_{xm} > 0 \\ E_y = E_{ym} \cos(\omega t - kz + \varphi_y) & E_{ym} > 0 \end{cases}$$

§ 7.3 均匀平面波的极化





§ 7.3 均匀平面波的极化

1、线极化

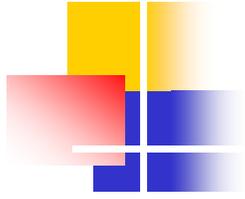
“同相位”即 $\Delta\varphi = \varphi_x - \varphi_y = \begin{cases} 0, \pm 2\pi, \dots & \text{取正号} \\ \pm\pi, \pm 3\pi, \dots & \text{取负号} \end{cases}$

$$\text{则 } \vec{E} = (E_{xm} \hat{x} \pm E_{ym} \hat{y}) \cos(\omega t - kz + \varphi_x)$$

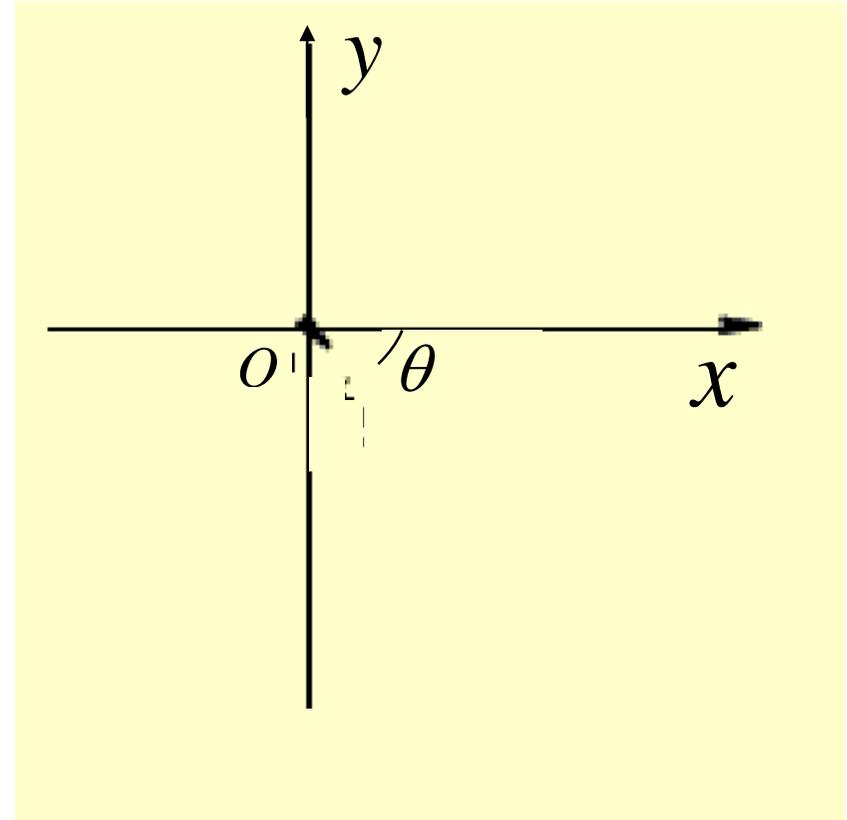
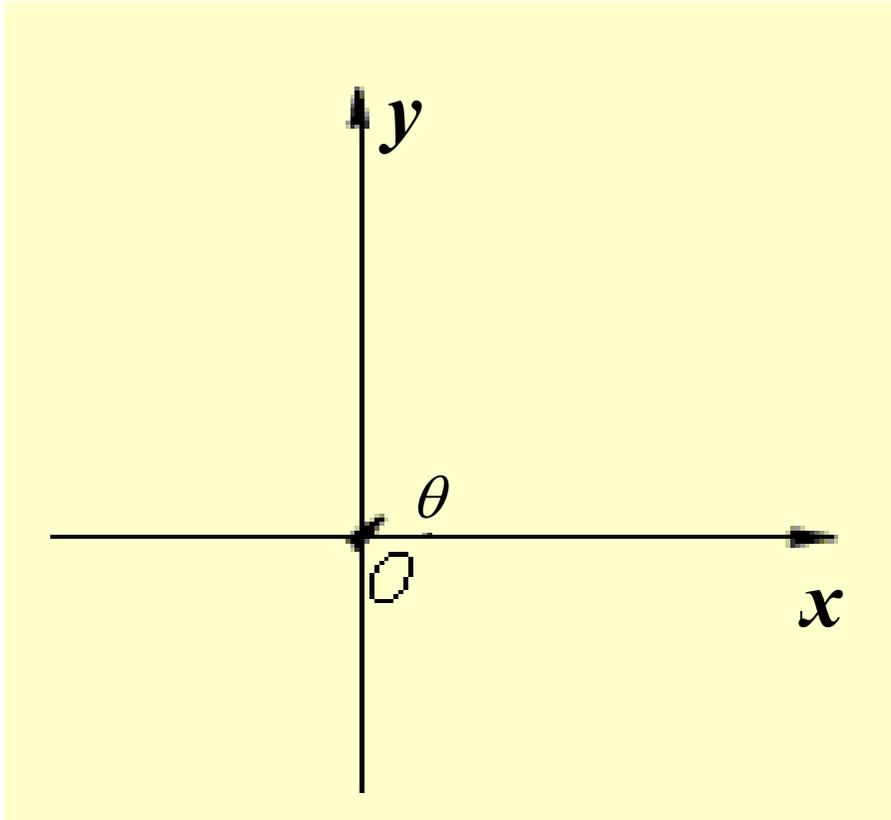
由此可见，电场强度 \vec{E} 的方向是确定的，叠加后 \vec{E} 的轨迹在一条直线上，这时称平面波为线极化波。

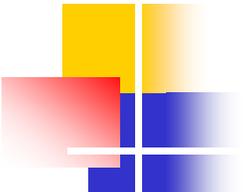
$\text{tg } \theta = E_{ym} / E_{xm}$ \vec{E} 的大小在变化，方向始终位于该直线上

注意：图中 \vec{E} 的振幅为 $\sqrt{E_{xm}^2 + E_{ym}^2}$



§ 7.3 均匀平面波的极化





§ 7.3 均匀平面波的极化

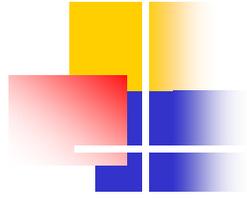
2、椭圆极化与圆极化

$$\Delta\varphi = \varphi_x - \varphi_y = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \pm 2n\pi & \text{取正号} \\ \frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{2} \pm 2n\pi & \text{取正号} \end{cases}$$

$$\vec{E} = E_{xm} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \hat{x} \pm E_{ym} \sin(\omega t - kz + \varphi_x) \hat{y}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E_x}{E_{xm}} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{ym}} \right)^2 = 1 \rightarrow \text{椭圆极化波}$$

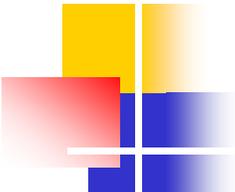
若 $E_{xm} = E_{ym}$ 则称为圆极化波



§ 7.3 均匀平面波的极化

$$\vec{E} = E_{xm} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \hat{x} \pm E_{ym} \sin(\omega t - kz + \varphi_x) \hat{y}$$

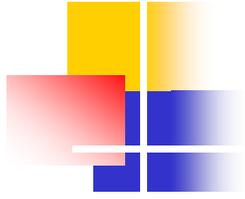
可以看出：由于两个方向随时间变化的规律不同，不能象线极化那样写成一个常矢量和一个时间因子的乘积，所以电场强度的方向不是固定的，随时间变化而变化，但电场强度的端点轨迹为一椭圆。



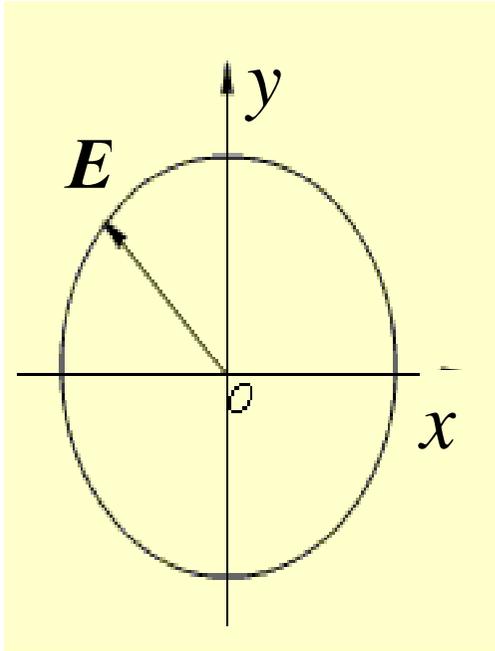
§ 7.3 均匀平面波的极化

$$(1) \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \dots$$

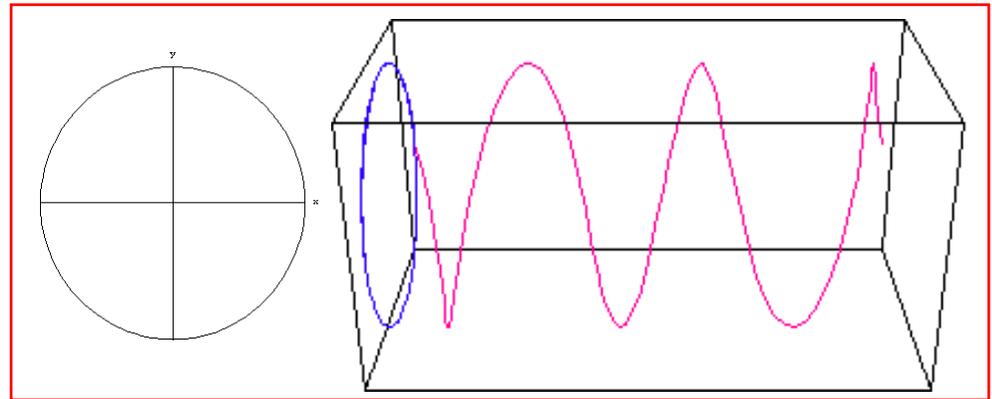
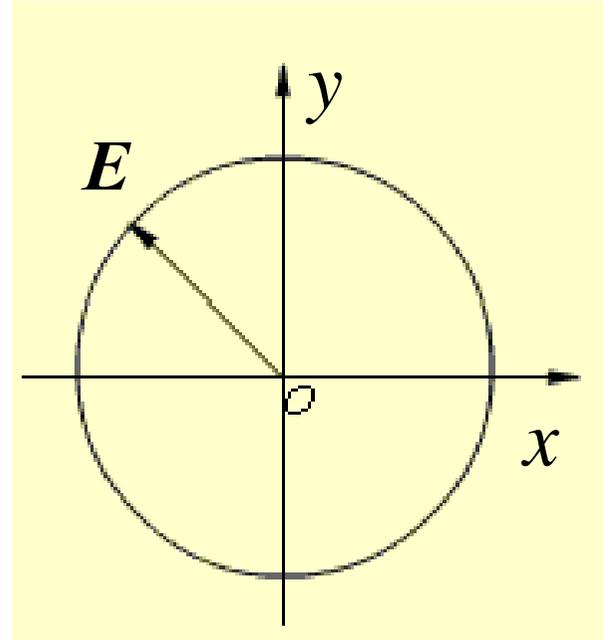
即x分量的相位超前y分量相位 $\pi/2$ ，假定某一时刻总相位为0，即 $\omega t - kz + \varphi_x = 0$ ，随着时间的变化，电场强度依次扫过第一、二、三、四象限，即逆时针旋转，这时旋转方向与传播方向符合右手螺旋法则，即右手拇指代表传播方向，四指代表旋转方向。此时称平面波为右旋椭圆极化波；若 $E_{xm} = E_{ym}$ 则称为右旋圆极化波。



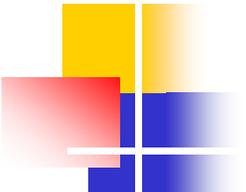
§ 7.3 均匀平面波的极化



右旋椭圆极化波



右旋圆极化波

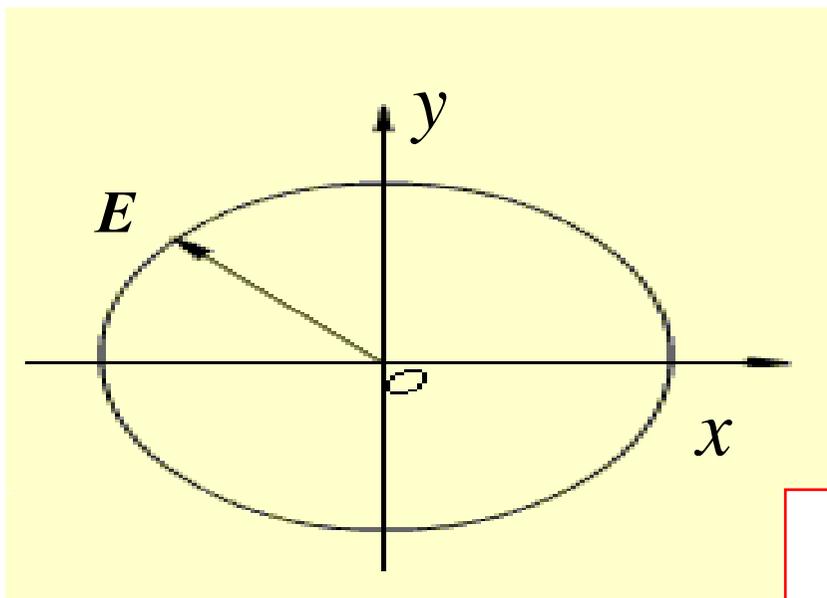


§ 7.3 均匀平面波的极化

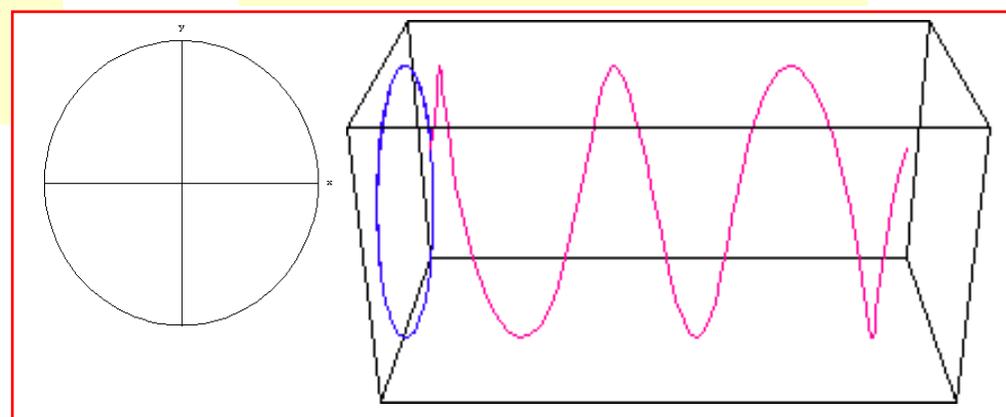
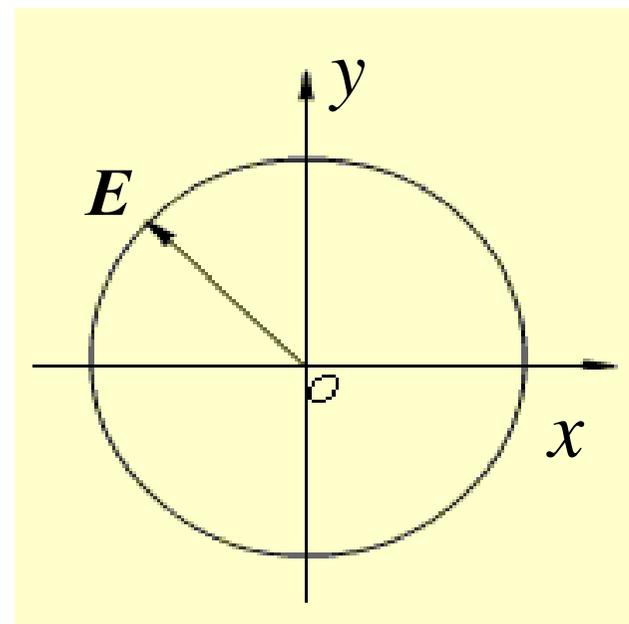
$$(2) \Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$$

即 x 分量的相位滞后 y 分量相位 $\pi/2$ ，假定某一时刻总相位为0，即 $\omega t - kz + \varphi_x = 0$ ，随着时间的变化，电场强度依次扫过第四、三、二、一象限，即顺时针旋转，这时旋转方向与传播方向符合左手螺旋法则，即左手拇指代表传播方向，四指代表旋转方向。此时称平面波为左旋椭圆极化波；若 $E_{xm} = E_{ym}$ 则称为左旋圆极化波。

§ 7.3 均匀平面波的极化



左旋椭圆极化波



左旋圆极化波

§ 7.3 均匀平面波的极化

3、一般情况 $\Delta\varphi = \varphi_x - \varphi_y \Rightarrow \varphi_y = \varphi_x - \Delta\varphi$

$$\frac{E_y}{E_{ym}} = \cos(\omega t - kz + \varphi_y)$$

加法公式

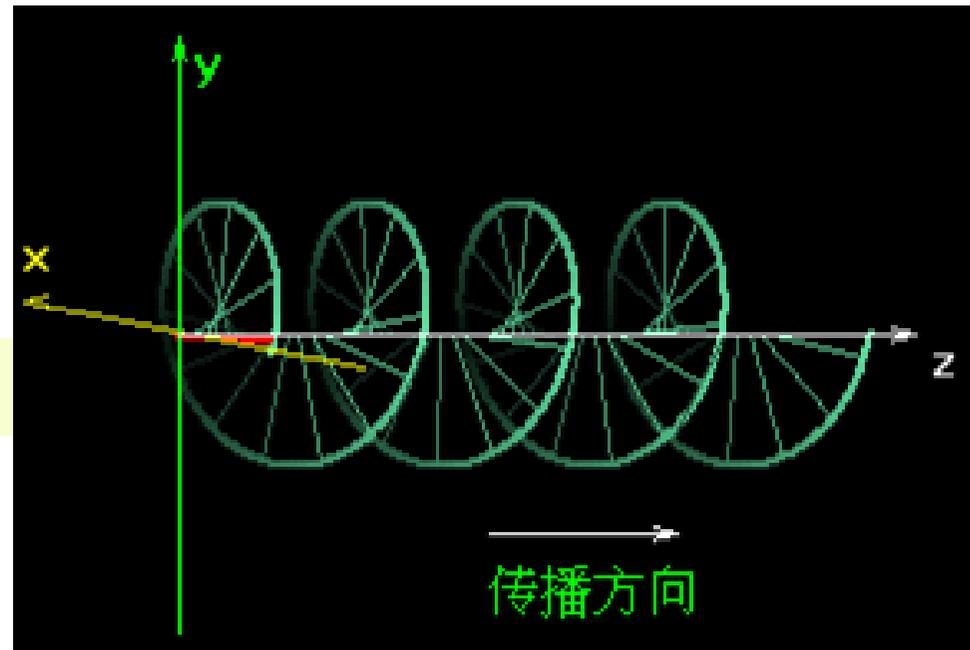
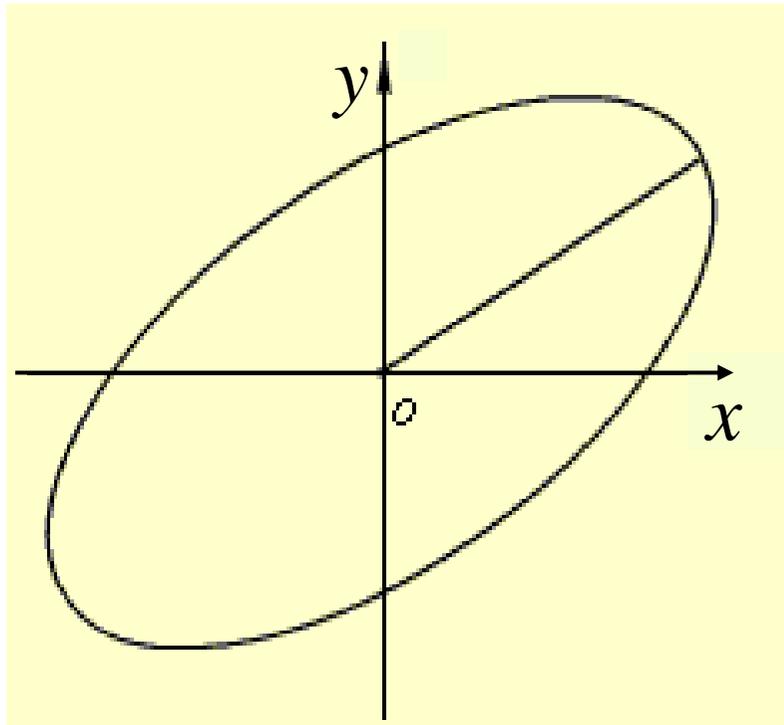
$$= \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \cos \Delta\varphi + \sin(\omega t - kz + \varphi_x) \sin \Delta\varphi$$

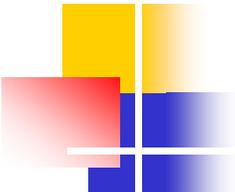
$$= \frac{E_x}{E_{xm}} \cos \Delta\varphi \pm \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_{xm}}\right)^2} \sin \Delta\varphi$$

$$\therefore \left(\frac{E_x}{E_{xm}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{xm}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{ym}}\right) \cos \Delta\varphi + \left(\frac{E_y}{E_{ym}}\right)^2 = \sin^2 \Delta\varphi$$

仍为一椭圆方程

§ 7.3 均匀平面波的极化





§ 7.3 均匀平面波的极化

性质:

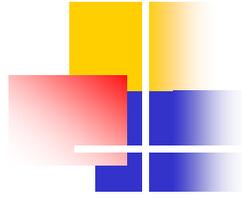
①任一线极化波可分解为两个大小相等、旋转方向相反的圆极化波之和。

证: 设极化方向为x方向 $\vec{E} = E_{xm} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \hat{x}$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{2} E_{xm} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \hat{x} + \frac{1}{2} E_{xm} \sin(\omega t - kz + \varphi_x) \hat{y} \rightarrow \text{右旋}$$

$$+ \frac{1}{2} E_{xm} \cos(\omega t - kz + \varphi_x) \hat{x} - \frac{1}{2} E_{xm} \sin(\omega t - kz + \varphi_x) \hat{y} \rightarrow \text{左旋}$$

②任何椭圆极化波可分解为两个旋转方向相反的圆极化波 (大小不一定相等)



§ 7.3 均匀平面波的极化

讨论：有损时， $k \rightarrow \beta$ ，振幅有衰减因子 $e^{-\alpha z}$ ，但在 $z = \text{常数}$ 的平面上，前面的讨论依然有效，只是振幅有变化，例如圆极化波圆的大小会随 z 的增大而减小，而无损时圆的大小不变。

应用：调幅电台 \vec{E} 垂直于地面；电视 \vec{E} 平行于地面
火箭、导弹等飞行器采用圆极化，线极化可能使飞行器收不到地面控制信号。

§ 7.3 均匀平面波的极化

例：判断以下各式代表的是什么极化波？
波向何方向传输？

$$\textcircled{1} \dot{\vec{E}} = E_0 (j\hat{x} - 3j\hat{y}) e^{jkz}; \quad \textcircled{2} \dot{\vec{E}} = E_0 (\hat{x} + 2j\hat{z}) e^{-jky};$$

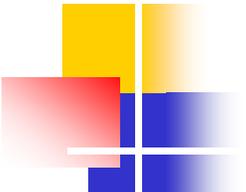
$$\textcircled{3} \vec{E}(t) = \hat{x}E_0 \sin(\omega t - kz) + \hat{y}E_0 \cos(\omega t - kz);$$

$$\textcircled{4} \vec{E}(t) = \hat{x}E_0 \sin(\omega t + kz + \frac{\pi}{4}) + \hat{y}E_0 \cos(\omega t + kz - \frac{\pi}{4})$$

解：① $\Delta\varphi = \varphi_x - \varphi_y = \pi$ ，为沿 $-z$ 方向传播的线极化波

$$\textcircled{2} E_{x0} = E_0; E_{z0} = 2E_0, \Delta\varphi = \varphi_z - \varphi_x = \frac{\pi}{2}$$

为沿 $+y$ 方向传播的右旋椭圆极化波



§ 7.3 均匀平面波的极化

$$\textcircled{3} \dot{\vec{E}}(t) = \hat{x}E_0(-j)e^{-jkz} + \hat{y}E_0e^{-jkz}; E_{x0} = E_{y0} = E_0;$$

$$\Delta\varphi = \varphi_x - \varphi_y = -\frac{\pi}{2}$$

为沿 + z 方向传播的左旋圆极化波

$$\textcircled{4} \vec{E}(t) = \hat{x}E_0(-j)e^{j\frac{\pi}{4}}e^{jkz} + \hat{y}E_0e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{jkz}; E_{x0} = E_{y0};$$

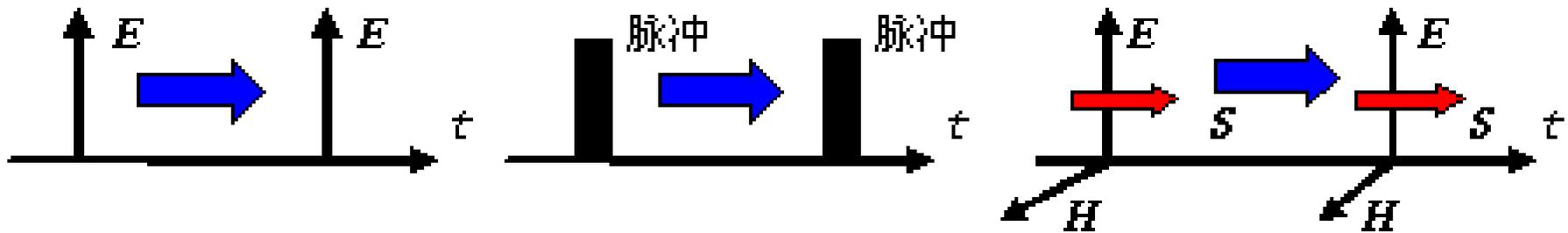
$$\Delta\varphi = \varphi_x - \varphi_y = 0$$

为沿 - z 方向传播的线极化波

§ 7.4 色散现象：相速和群速

电磁波的速度

变化的电场和磁场相互激发在空间传递的速度可视为电磁波的速度。但对于波动而言，存在着不同物理量的传播速度。如：波动相位、波动能量和电磁波信号传播速度。他们之间存在什么样的联系和差别。



(a) 相位的传播速度； (b) 信号的传播速度； (c) 能量的传播速度

§ 7.4 色散现象：相速和群速

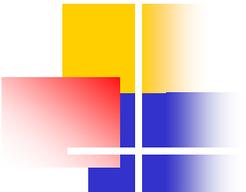
电磁波的色散

相速和衰减常数随频率变化的现象（若无损，则只考虑相速）

$$\text{无损 } (\sigma = 0): v_P = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

有损 ($\sigma \neq 0$):

$$v_P = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{2}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}}}; \quad \alpha = \frac{\omega\mu\sigma}{2\beta} = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \frac{\frac{\sigma}{\omega\epsilon}}{\left[2 + 2\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}\right]^{1/2}}$$



§ 7.4 色散现象：相速和群速

介质的色散： $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ ， $\mu = \mu(\omega)$ ， $\sigma = \sigma(\omega)$

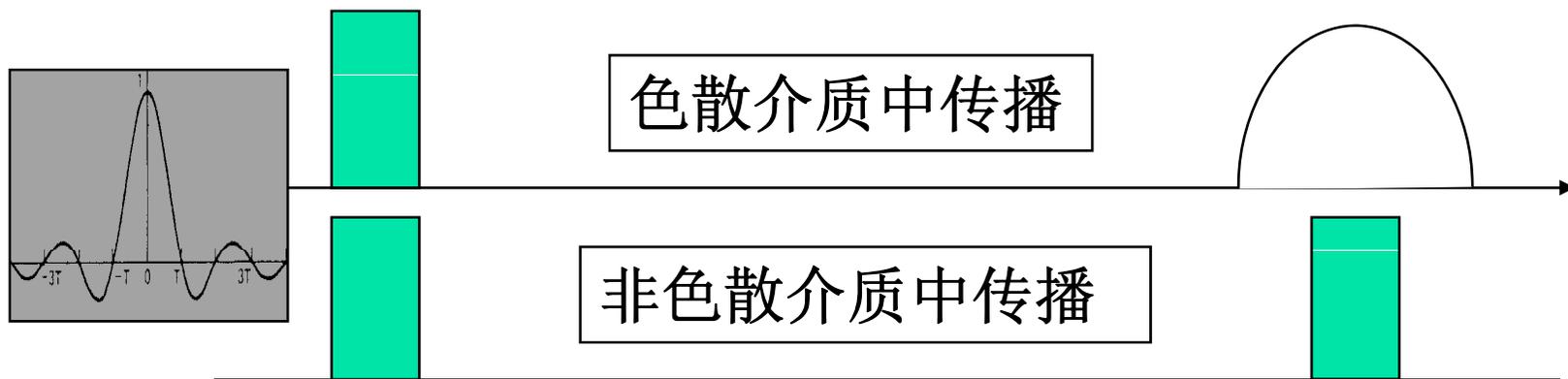
无损时，若 μ ， ε 不是频率的函数，则无色散

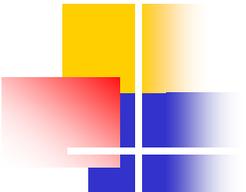
有损时，即使 μ ， ε 不是频率的函数，也有色散

除真空外，绝大多数介质的介电常数、磁导率、电导率都是随频率变化的，因此不论是无损还是有损介质，一般来说相速都是频率的函数。

§ 7.4 色散现象：相速和群速

通常我们传输的信号例如一个脉冲调制信号的电磁波是由许多谐波分量组成，由于色散现象，信号会发生畸变（变形），因为不同频率的电磁波在传播过程中，相速和衰减都不相同，经过一段距离的传播后，各个频率的电磁波的相互关系将发生变化，因此叠加起来的波形会发生变化，相对于原来的波形来说就失真了。





§ 7.4 色散现象：相速和群速

设有一群 $w_1 \leq w \leq w_2$ 的平面波（波群）

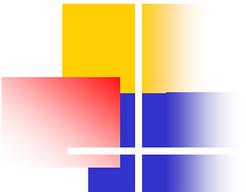
传播方向为 z 方向

$$z = 0, \psi(0, t) = \operatorname{Re} \left\{ \int_{w_1}^{w_2} \dot{\psi}(0, w) e^{j\omega t} dw \right\}$$

→ 电磁场的某一分量

$$z \text{ 点时, } \psi(z, t) = \operatorname{Re} \left\{ \int_{w_1}^{w_2} \dot{\psi}(0, w) e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} dw \right\}$$

令 $T = t - z\sqrt{\mu\varepsilon}$ ，若 $\alpha = 0$ ， T 与频率无关，则无色散，
否则有色散。



§ 7.4 色散现象：相速和群速

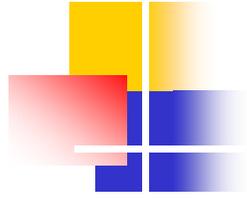
下面考虑在窄带信号时，不失真的条件

∵ 是窄带信号，设中心频率为 $w_0 = \frac{w_1 + w_2}{2}$

$$\Rightarrow w_1 = w_0 - \Delta w; \quad w_2 = w_0 + \Delta w; \quad \Delta w = \frac{w_2 - w_1}{2};$$

$\frac{\Delta w}{w} \ll 1$; 令 $w = w_0 + w'$ w' 为相移频率,

即和中心频率的频率差

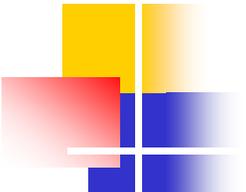


§ 7.4 色散现象：相速和群速

$$\begin{aligned}\psi(0, t) &= \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} \dot{\psi}(0, \omega_0 + \omega') e^{j(\omega_0 + \omega')t} d\omega' \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \underbrace{\left[\int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} \dot{\psi}(0, \omega_0 + \omega') e^{j\omega' t} d\omega' \right]}_{\text{包络 (代表传输的信号)}} \underbrace{e^{j\omega_0 t}}_{\text{载波}} \right\}\end{aligned}$$

包络（代表传输的信号）

载波



§ 7.4 色散现象：相速和群速

传播一段距离后，看一下包络的变化

$$\psi(z, t) = \operatorname{Re} \left\{ \left[\int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} \dot{\psi}(0, \omega_0 + \omega') e^{-\alpha z} e^{j(\omega' t - \beta z)} d\omega' \right] e^{j\omega_0 t} \right\}$$

α, β 均为 $\omega_0 + \omega'$ 的函数

$$\Rightarrow \alpha(\omega_0 + \omega') = \alpha_0 + \alpha_1 \omega' + \alpha_2 \omega'^2 + \dots \approx \alpha_0$$

$$\text{其中 } \alpha_0 = \alpha(\omega_0), \quad \alpha_1 = \left. \frac{d\alpha}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0}, \quad \alpha_2 = \left. \frac{1}{2} \frac{d^2\alpha}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0}$$

§ 7.4 色散现象：相速和群速

$$\Rightarrow \beta(\omega_0 + \omega') = \beta_0 + \beta_1 \omega' + \beta_2 \omega'^2 + \dots \approx \beta_0 + \beta_1 \omega'$$

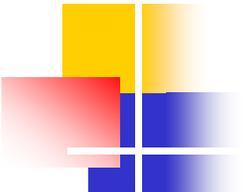
$$\text{其中 } \beta_0 = \beta(\omega_0), \quad \beta_1 = \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0}, \quad \beta_2 = \left. \frac{1}{2} \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0}$$

$$\psi(z, t)$$

$$= \text{Re} \left\{ \underbrace{\left[\int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} \psi(0, \omega_0 + \omega') e^{j(\omega' t - \beta_1 \omega' z)} d\omega' \right]}_{\text{Z点包络形状}} \underbrace{\left[e^{-\alpha_0 z} e^{j(\omega_0 t - \beta_0 z)} \right]}_{\text{Z点载波信号}} \right\}$$

Z点包络形状

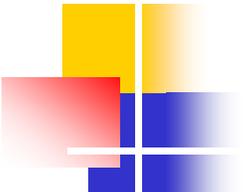
Z点载波信号



§ 7.4 色散现象：相速和群速

$e^{j(\omega' t - \beta_1 \omega' z)}$ 中 $(t - \beta_1 z)$ 与 ω' 无关，所以经过一段距离传输后，包络的每个频率成分相对于原来的 $z = 0$ 处相位上有个延迟，这个延迟与频率无关，即对所有的频率成分是不同的，因此包络的形状未发生改变，只是在时间轴上有个延迟或平移，信号无失真。

$$\therefore \text{不失真条件} \begin{cases} \alpha(\omega) \approx \alpha_0(\omega_0) \\ \beta(\omega) \approx \beta_0(\omega_0) + \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) \end{cases}$$



§ 7.4 色散现象：相速和群速

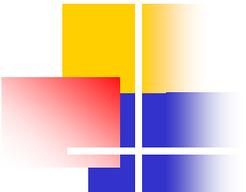
包络的等位面： $w't - \beta_1 w'z = \text{常数}$

$$\text{包络的相速度: } \frac{w'}{\beta_1 w'} = \beta_1^{-1} = \left. \frac{dw}{d\beta} \right|_{w=w_0}$$

定义群速度 $v_g = \left. \frac{dw}{d\beta} \right|_{w=w_0}$ ：代表不失真条件下，波群的传播速度。

（如果不满足不失真条件，则在传播过程中，波群的形状发生改变因此走过一定距离后，波形所走的距离无法确定， v_g 也就不能再表示波群的传播速度。）

在不失真的条件下，电磁场的能量也是以群速度传播的，因此群速度也代表电磁波的能量传播速度。

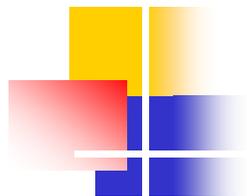


§ 7.4 色散现象：相速和群速

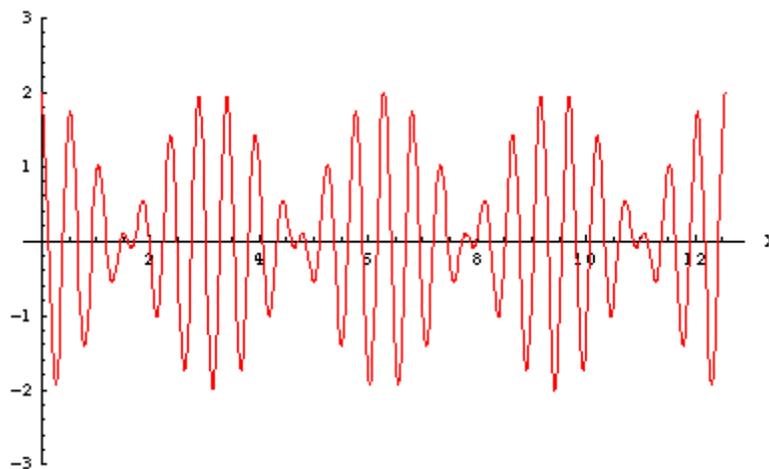
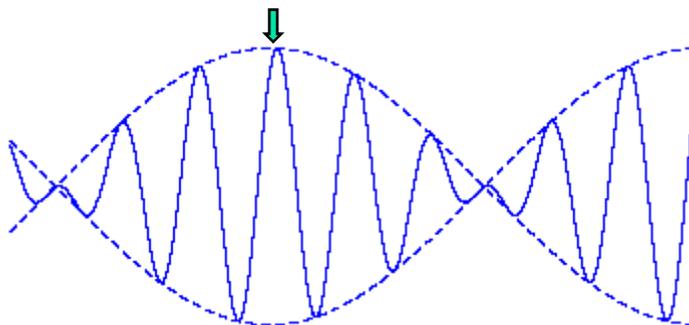
群速度与相速度之间的关系：

$$v_g = \frac{dw}{d\beta} = \frac{d(\beta v_p)}{d\beta} = \beta \frac{dv_p}{d\beta} + v_p = \beta \frac{dv_p}{dw} \frac{dw}{d\beta} + v_p$$

$$\Rightarrow v_g = \frac{v_p}{1 - \beta \frac{dv_p}{dw}} = \frac{v_p}{1 - \frac{w}{v_p} \frac{dv_p}{dw}}$$



§ 7.4 色散现象：相速和群速



§ 7.4 色散现象：相速和群速

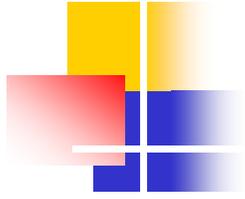
$$\frac{dv_p}{d\omega} = 0 \Rightarrow \text{无色散} \Rightarrow v_g = v_p$$

$$\frac{dv_p}{d\omega} < 0 \Rightarrow \text{相速随频率减小}$$

$\Rightarrow v_g < v_p$, 群速小于相速, 称为正常色散

$$\frac{dv_p}{d\omega} > 0 \Rightarrow \text{相速随频率增加}$$

$\Rightarrow v_g > v_p$, 群速大于相速, 称为反常色散



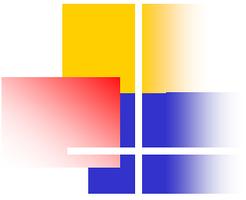
§ 7.5 非均匀平面波

先看一下均匀平面波的相位因子

$\sigma = 0$, 为 $e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$, 其中 $\vec{k} = k\hat{n}$, $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ 为实数

$\sigma \neq 0$, 为 $e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{-\alpha\hat{n}\cdot\vec{r}} e^{-j\beta\hat{n}\cdot\vec{r}}$, 其中 $\vec{k} = k\hat{n}$, $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon_k} = \beta - j\alpha$ 为复数, 但因 \vec{k} 的实部和虚部方向相同, 即等位面 and 等振幅面重合。

由此可见, 非均匀平面波主要是不能让 \vec{k} 的虚部为零 ($\sigma = 0$) 或者虚部和实部的方向相同 ($\sigma \neq 0$)。



§ 7.5 非均匀平面波

非均匀平面波：等相位面和等振幅面不一致，
即 β 和 α 方向不一致

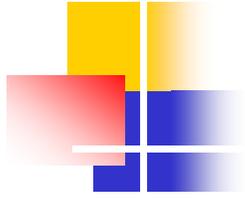
$$\text{设 } \vec{k} = \vec{k}' - j\vec{k}'' , \therefore e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = e^{-\vec{k}'' \cdot \vec{r}} e^{-j\vec{k}' \cdot \vec{r}}$$

则 \vec{k}' 为相位矢量： $\left\{ \begin{array}{l} \text{方向：等相位面的传播方向} \\ \text{大小：相位常数} \end{array} \right.$ ，

即等相位面垂直于 \vec{k}'

\vec{k}'' 为衰减矢量： $\left\{ \begin{array}{l} \text{方向：等振幅面的传播方向} \\ \text{大小：衰减常数} \end{array} \right.$ ，

即等振幅面垂直于 \vec{k}''



§ 7.5 非均匀平面波

$$\text{由} \begin{cases} \nabla \times \dot{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon_k \dot{\mathbf{E}} \\ \nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu \dot{\mathbf{H}} \end{cases} \xrightarrow{\nabla \rightarrow -j\vec{k}} \begin{cases} -j\vec{k} \times \dot{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon_k \dot{\mathbf{E}} \\ -j\vec{k} \times \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu \dot{\mathbf{H}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{\omega\epsilon_k} \dot{\mathbf{H}} \times \vec{k} \\ \dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\omega\mu} \vec{k} \times \dot{\mathbf{E}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \textcircled{1} \begin{cases} \vec{k} \cdot \dot{\mathbf{E}} = 0 \\ \vec{k} \cdot \dot{\mathbf{H}} = 0 \end{cases} \quad \textcircled{2} \dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\omega\mu} \vec{k} \times \frac{1}{\omega\epsilon_k} (\dot{\mathbf{H}} \times \vec{k}) = \frac{k^2}{\omega^2 \mu \epsilon_k} \dot{\mathbf{H}}$$

§ 7.5 非均匀平面波

$$\begin{aligned} \text{其中 } k^2 &= \vec{k} \cdot \vec{k} = k'^2 - k''^2 - 2j\vec{k}' \cdot \vec{k}'' = \omega^2 \mu \epsilon_k \\ &= \omega^2 \mu \epsilon - j\omega \mu \sigma \end{aligned}$$

$$\text{若 } \sigma = 0 \text{ 则有 } \begin{cases} \vec{k}' \cdot \vec{k}'' = 0 \\ k'^2 - k''^2 = \omega^2 \mu \epsilon \end{cases}$$

即无损介质中的非均匀平面波等相位面和等振幅面正交（垂直）。

$$\text{若 } \sigma \neq 0 \text{ 则有 } \begin{cases} \vec{k}' \cdot \vec{k}'' = \frac{1}{2} \omega \mu \sigma \\ k'^2 - k''^2 = \omega^2 \mu \epsilon \end{cases}$$

§ 7.6 平面波的反射和折射

介质1: 无限远处有一均匀
平面波入射

光学中 (介质)

$$\text{折射率 } n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \stackrel{\sqrt{\mu_r}=1}{=} \sqrt{\epsilon_r}$$

$$\therefore v_p = \frac{c}{n}, k = k_0 n,$$

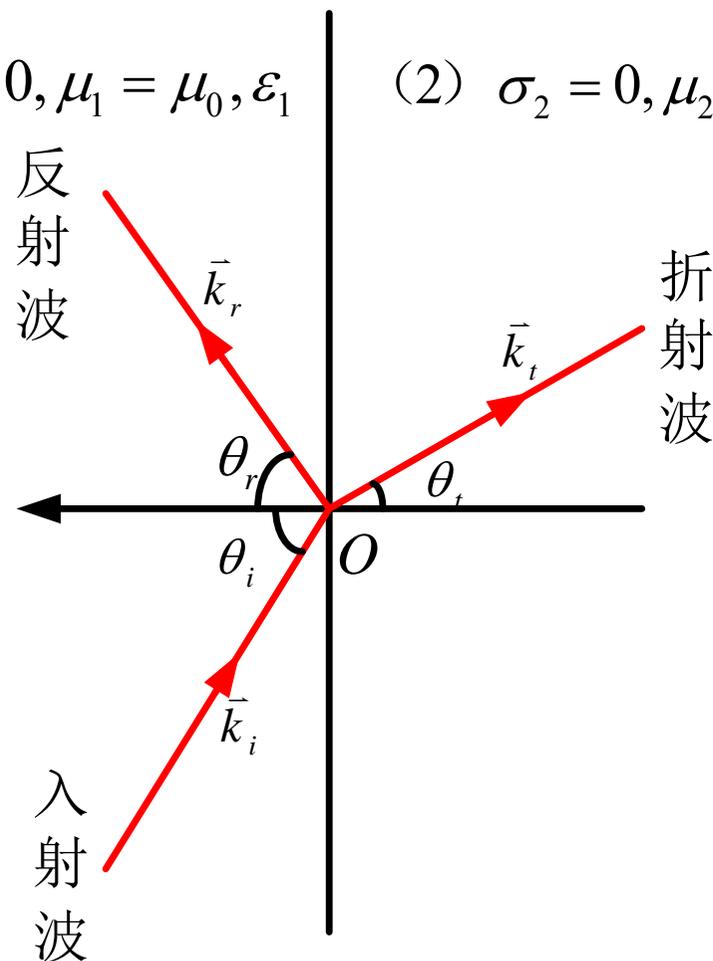
其中 k_0 为真空中的传播常数

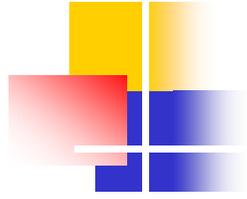
$$\frac{n_1}{n_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} (\because \mu_1 = \mu_2 = \mu_0)$$

定义相对概念 $\begin{cases} n \text{较大: 光密介质} \\ n \text{较小: 光疏介质} \end{cases}$

(1) $\sigma_1 = 0, \mu_1 = \mu_0, \epsilon_1$

(2) $\sigma_2 = 0, \mu_2 = \mu_0, \epsilon_2$





§ 7.6 平面波的反射和折射

一、反射和折射定律

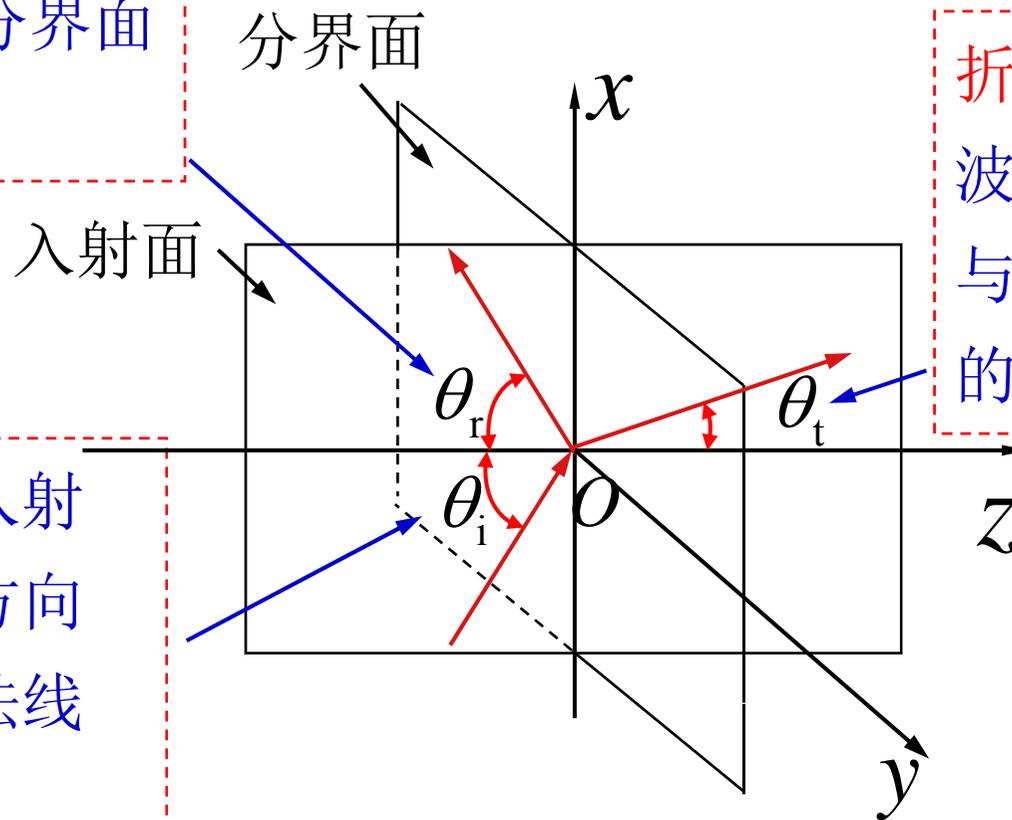
当平面波从介质 1 中入射时，如把介质问题看成等效真空问题，在介质交界表面产生极化电荷，相应的有极化电流，这些极化电荷电流作为新的场源在介质交界处可能产生向二个介质传播的电磁波。我们将向介质 1 传播的波称为反射波，将向介质 2 传播的波称为折射波。

§ 7.6 平面波的反射和折射

反射角：反射波的传播方向与分界面法线的夹角。

折射角：透射波的传播方向与分界面法线的夹角。

入射角：入射波的传播方向与分界面法线的夹角。



入射平面：由 \vec{k}_i （入射波传播矢量）与介质交界处法向 \hat{n} 构成的平面

§ 7.6 平面波的反射和折射

有：

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{E}}_i &= \dot{\vec{E}}_{mi} e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \\ \dot{\vec{E}}_r &= \dot{\vec{E}}_{mr} e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \end{aligned} \right\} \text{介质1中的电场}$$

$$\dot{\vec{E}}_t = \dot{\vec{E}}_{mt} e^{-j\vec{k}_t \cdot \vec{r}} \rightarrow \text{介质2中的电场}$$

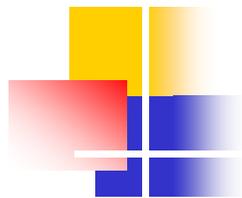
交界面上必满足

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{n} \times (\dot{\vec{E}}_i + \dot{\vec{E}}_r) &= \hat{n} \times \dot{\vec{E}}_t \\ \hat{n} \times (\dot{\vec{H}}_i + \dot{\vec{H}}_r) &= \hat{n} \times \dot{\vec{H}}_t \end{aligned} \right.$$

切向分量连续条件

由于交界面上 \vec{r} 仍有任意性，因此交界处的相位因子必须相等即 $\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_t \cdot \vec{r}$ (此时 \vec{r} 在交界面上)

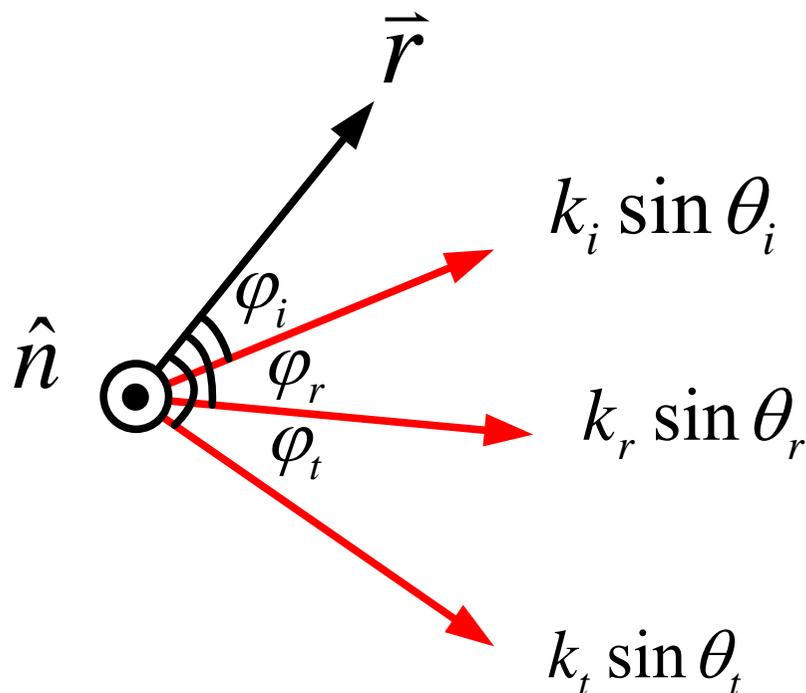
$$\text{即 } k_i \sin \theta_i \cos \varphi_i r = k_r \sin \theta_r \cos \varphi_r r = k_t \sin \theta_t \cos \varphi_t r$$

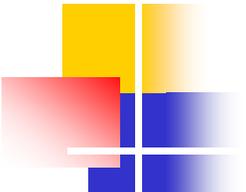


§ 7.6 平面波的反射和折射

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_i: \vec{k}_i \text{ 在交界面上的投影与 } \vec{r} \text{ 的夹角} \\ \varphi_r: \vec{k}_r \text{ 在交界面上的投影与 } \vec{r} \text{ 的夹角} \\ \varphi_t: \vec{k}_t \text{ 在交界面上的投影与 } \vec{r} \text{ 的夹角} \end{array} \right.$$

由于 \vec{r} 是任意性，所以 φ_i ， φ_r ， φ_t 也是任意的，且不依赖于 θ_i ， θ_r ， θ_t 独立取值，故三个cos因子必须相等，才能使等式成立。





§ 7.6 平面波的反射和折射

① $\varphi_i = \varphi_r = \varphi_t$ 即 $\vec{k}_i, \vec{k}_r, \vec{k}_t, \hat{n}$ 共面

即反射波和折射波的传播矢量都位于入射面内

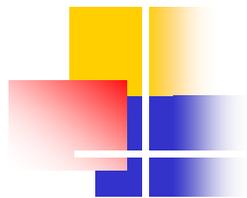
$$\Rightarrow k_i \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r = k_t \sin \theta_t$$

② \because 入射波和反射波均在介质1内 $\Rightarrow k_i = k_r$

$\Rightarrow \theta_i = \theta_r$, 即反射角等于入射角 \rightarrow 反射定律

③ $k_i \sin \theta_i = k_t \sin \theta_t \Rightarrow k_0 n_1 \sin \theta_i = k_0 n_2 \sin \theta_t$

$\Rightarrow n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \rightarrow$ 折射定律



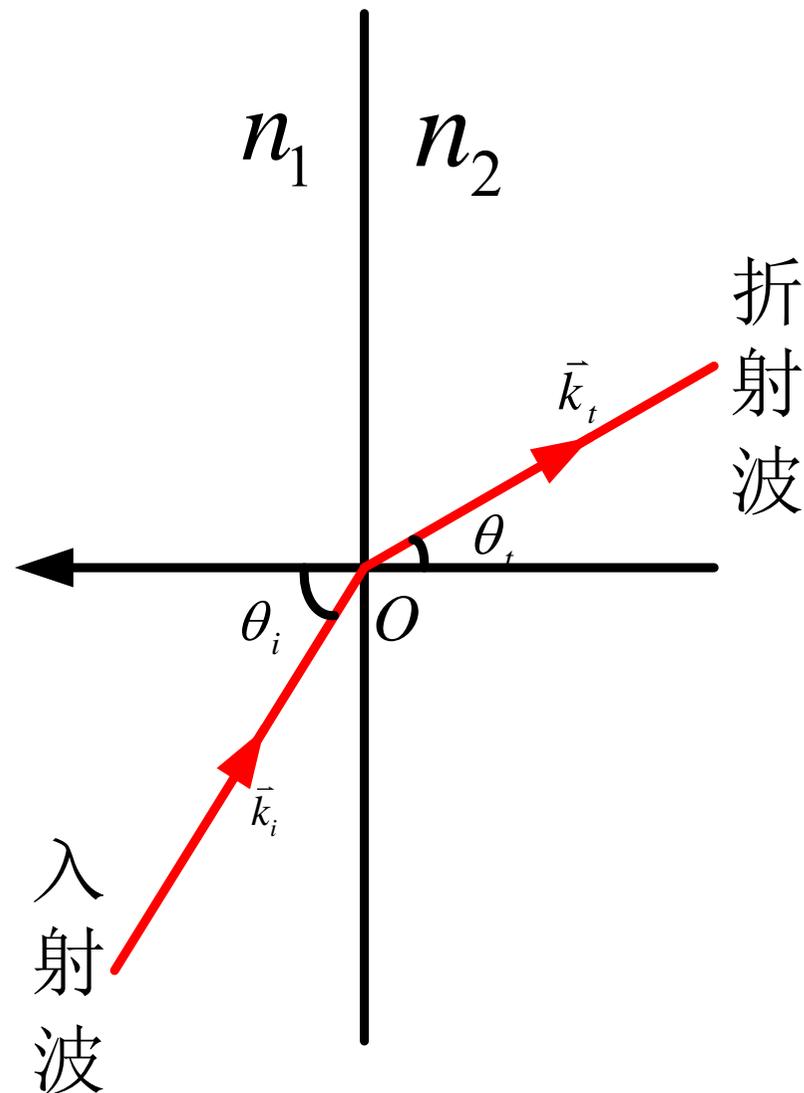
§ 7.6 平面波的反射和折射

(1) 若 $n_1 < n_2$

$$\Rightarrow \sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \Rightarrow \theta_t < \theta_i$$

折射角小于入射角，

不论 θ_i 取何值 ($0 \sim \frac{\pi}{2}$) 都有解



§ 7.6 平面波的反射和折射

(2) 若 $n_1 > n_2$, 即平面波从光密介质入射

$$\sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \Rightarrow \theta_t > \theta_i$$

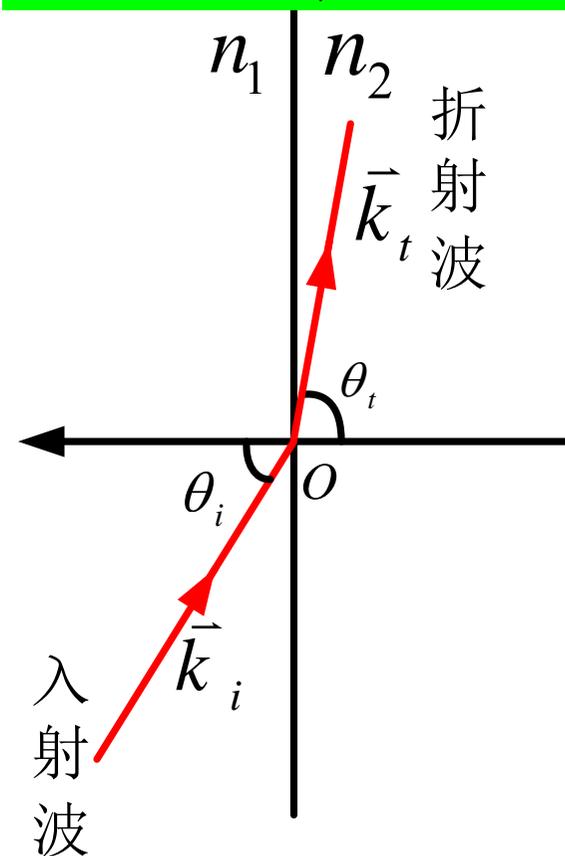
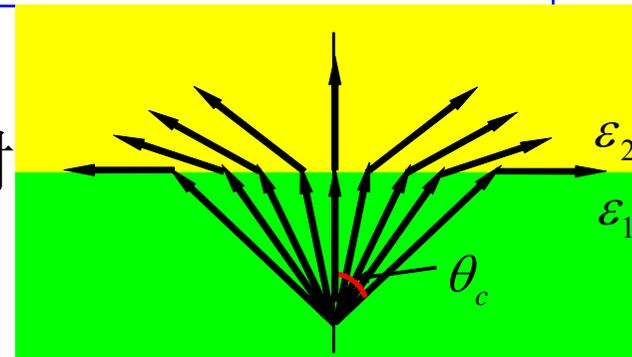
折射角大于入射角, 方程可能无解

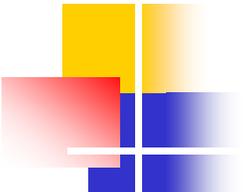
($\because \sin \theta_t > 1$)

临界角 θ_c :

即 $\theta_t \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时对应的入射角, $\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$

$\Rightarrow \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$, 当 $\theta_i > \theta_c$ 时无解





§ 7.6 平面波的反射和折射

其含义是什么？

物理上当 $\theta_i > \theta_c$ 时应该有解，现在数学上无解说明

假定有问题：当推导折射定律时用了折射波 $\vec{k}_t = k_t \hat{k}_t$ 这样一个结果，即折射波的传播矢量 \vec{k}_t 可以表达为一个实数和实矢量的乘积，这实际上假定了折射波为没有衰减的均匀平面波，现在 $\theta_i > \theta_c$ 时无解，则说明这一假定有问题，**应假定折射波为非均匀平面波**。

§ 7.6 平面波的反射和折射

即 $\theta_i > \theta_c$ 时, $\vec{k}_t = \vec{k}_t' - j\vec{k}_t''$

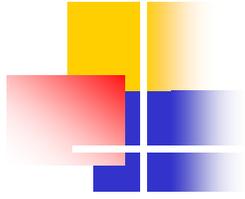
\Rightarrow 交界处 $\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_t' \cdot \vec{r} - j\vec{k}_t'' \cdot \vec{r}$

有 $\begin{cases} \vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_t' \cdot \vec{r} \\ \vec{k}_t'' \cdot \vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{k}_t'' \text{ 垂直于交界面, 即衰减方向为} \\ \text{垂直于交界面, 即等振幅面平行于交界面} \end{cases}$

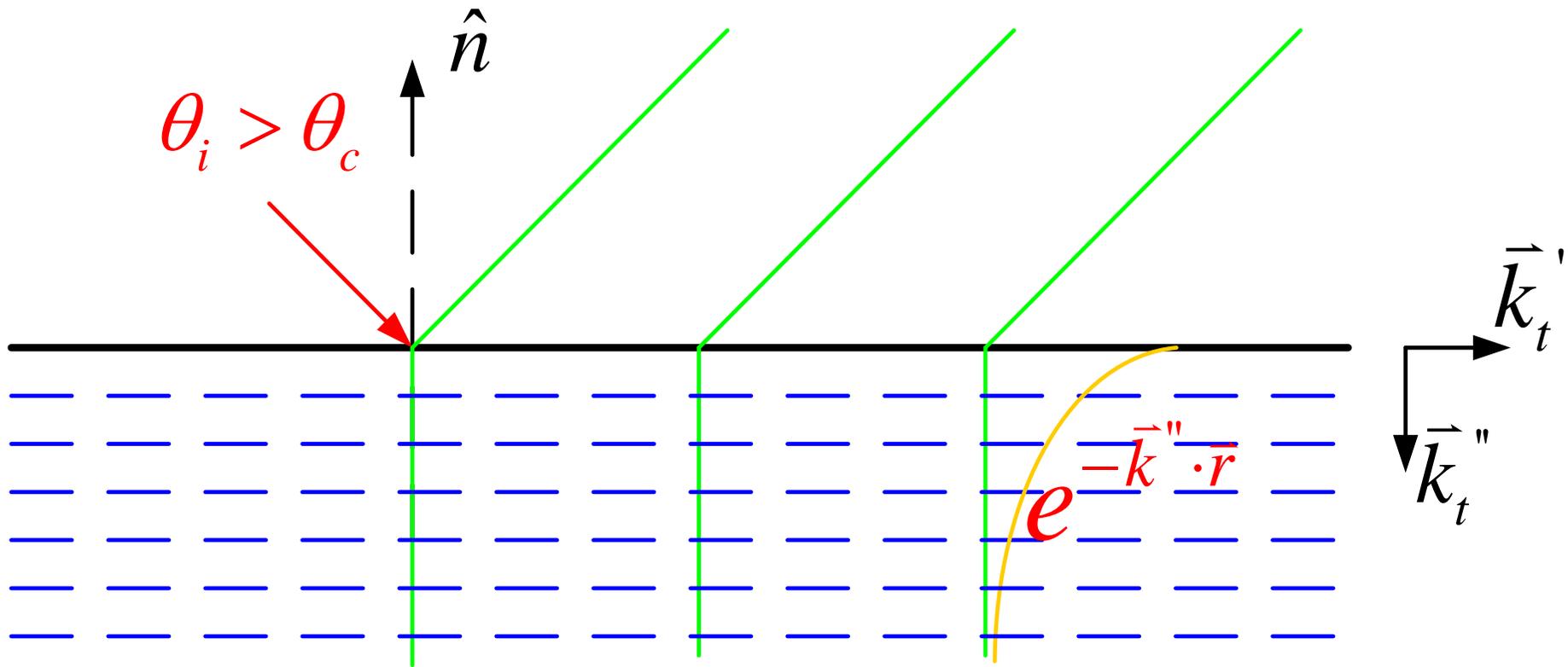
\therefore 无损时 ($\sigma = 0$) 时非均匀平面波满足:

$$\begin{cases} \vec{k}' \cdot \vec{k}'' = 0 \\ k'^2 - k''^2 = \omega^2 \mu \varepsilon \end{cases}$$

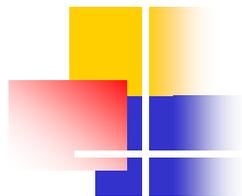
即等相位面垂直于等振幅面, 即相位传播方向沿着交界面, 或者说等相位面垂直于交界面



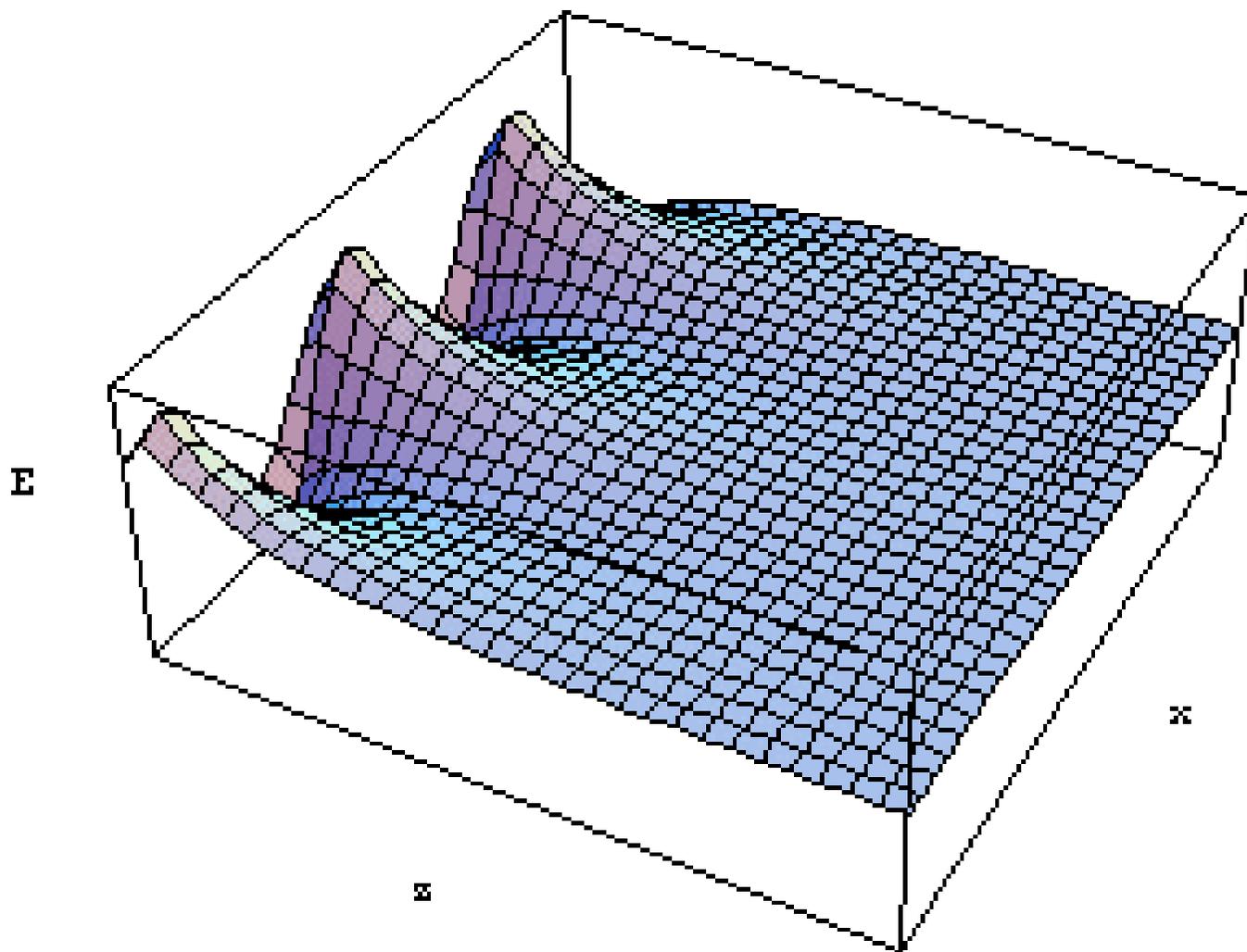
§ 7.6 平面波的反射和折射



—— 等相位面 - - - 等振幅面



§ 7.6 平面波的反射和折射



§ 7.6 平面波的反射和折射

$$\text{由 } \vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_t' \cdot \vec{r} \Rightarrow k_i \sin \theta_i \cos \varphi_i r = k_t' \sin \theta_t' \cos \varphi_t' r$$

其中 $\sin \theta_t' = 1$, φ_t' 为 \vec{k}_t' 在交界面上的投影与 \vec{r} 的夹角

$\Rightarrow \varphi_i = \varphi_t'$ 即 \vec{k}_t' 位于入射平面, 即 $\vec{k}_i, \vec{k}_r, \vec{k}_t', \vec{k}_t'', \hat{n}$ 共面

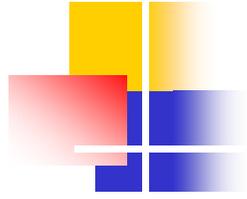
$\Rightarrow k_i \sin \theta_i = k_t' \rightarrow$ 可见介质2中的非平面波的相位常数

与 μ_2, ε_2 无关 而与入射波和介质1的参量有关。

$$k_t'' = \sqrt{k_i^2 \sin^2 \theta_i - k_2^2} \quad (\text{由 } k_t'^2 - k_t''^2 = w^2 \mu_2 \varepsilon_2 = k_2^2)$$

$k_2 = w \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}$ 为介质2中均匀平面波的相位常数 ($\sigma = 0$)

称这种沿分界表面传播, 沿分界面法向方向指数衰减, 即被分界面紧紧束缚的波为表面波。



§ 7.6 平面波的反射和折射

二、费涅尔公式

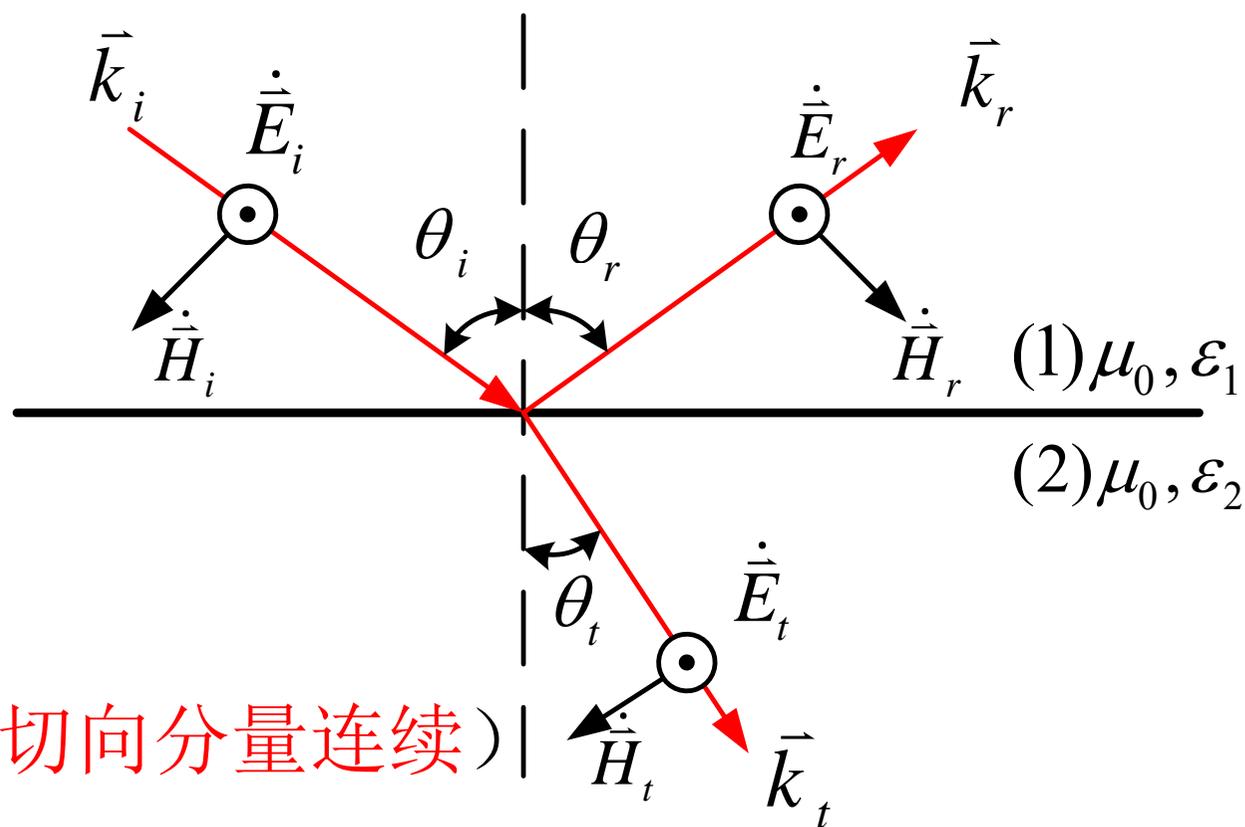
费涅尔公式研究入射波、反射波及折射波电磁场大小及初始相位之间的关系。

分类 { **垂直极化波**: 电场强度垂直于入射面的波
平行极化波: 电场强度平行于入射面的波

§ 7.6 平面波的反射和折射

1、垂直线极化波入射

垂直于入射面的线极化波，只能产生垂直线极化波的反射波和折射波。在交界面由边界条件（ \vec{E}, \vec{H} 切向分量连续）



§ 7.6 平面波的反射和折射

$$\dot{E}_{mi} + \dot{E}_{mr} = \dot{E}_{mt} \Rightarrow \dot{E}_{mr} - \dot{E}_{mt} = -\dot{E}_{mi}$$

以左边为参考方向为正

$$\dot{H}_{mi} \cos \theta_i - \dot{H}_{mr} \cos \theta_r = \dot{H}_{mt} \cos \theta_t$$

$$\text{由 } \theta_i = \theta_r; \dot{H}_i = \frac{1}{\eta_1} \dot{E}_i; \dot{H}_r = \frac{1}{\eta_1} \dot{E}_r; \dot{H}_t = \frac{1}{\eta_2} \dot{E}_t$$

(注：波阻抗都取正号，因为 \dot{H} 的参考方向的选择已使 $\dot{E} \times \dot{H}$ 为传播方向)

$$\text{带入后得 } \dot{E}_{mr} + \frac{\eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i} \dot{E}_{mt} = \dot{E}_{mi}, \quad \frac{\eta_1}{\eta_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$

($\because \mu_1 = \mu_2 = \mu_0$)

§ 7.6 平面波的反射和折射

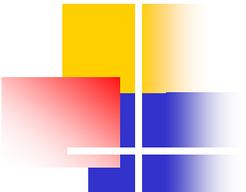
$$\therefore \frac{\dot{E}_{mr}}{\dot{E}_{mi}} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$$

$$\stackrel{\mu_1 = \mu_2 = \mu_0}{=} \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \stackrel{\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{n_2}{n_1}}{=} \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)}$$

$$\frac{\dot{E}_{mt}}{\dot{E}_{mi}} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$$

$$\stackrel{\mu_1 = \mu_2 = \mu_0}{=} \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \stackrel{\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{n_2}{n_1}}{=} \frac{2 \cos \theta_i \sin \theta_t}{\sin(\theta_t + \theta_i)}$$

→ 垂直线极化波入射时的费涅尔公式



§ 7.6 平面波的反射和折射

半波损失:

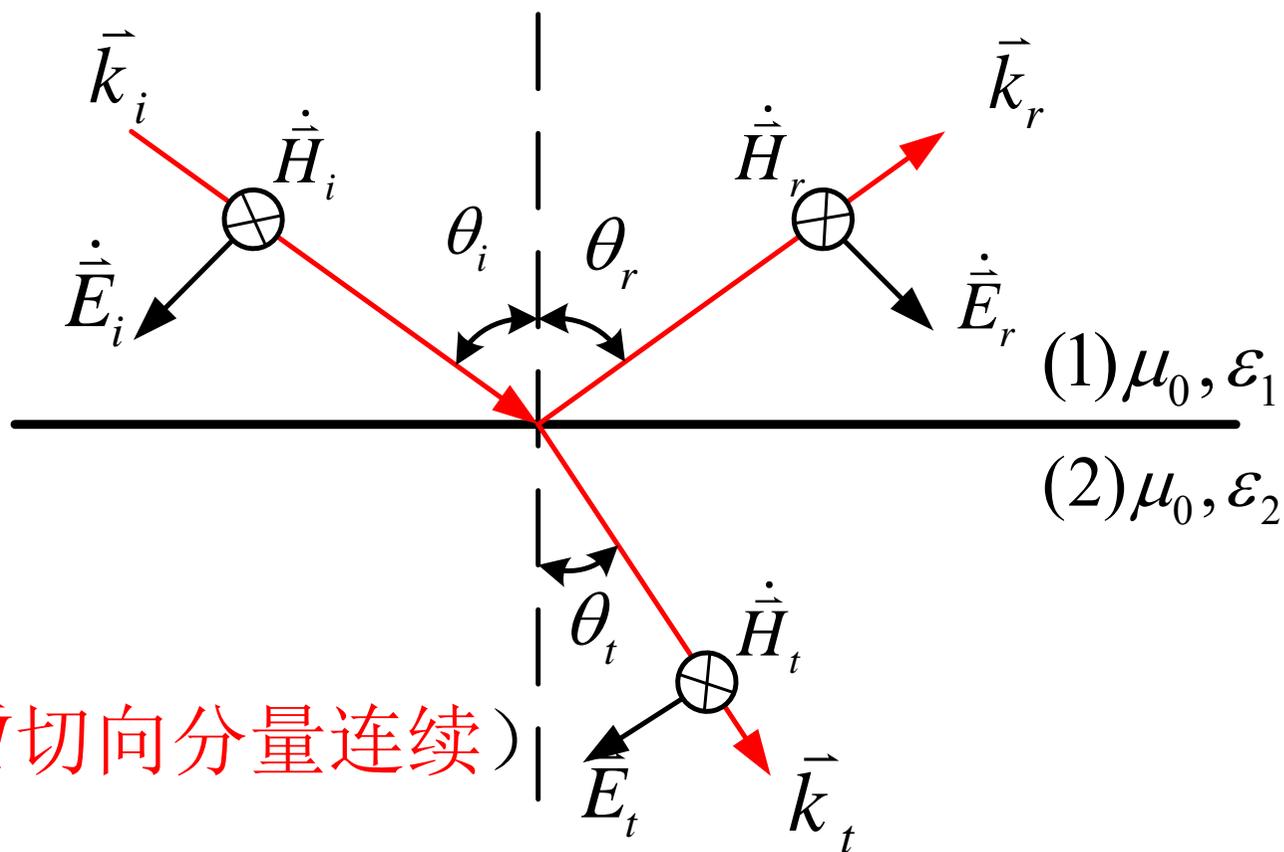
$$\begin{cases} n_1 < n_2 \Rightarrow \theta_t < \theta_i \Rightarrow \dot{E}_{mr} / \dot{E}_{mi} < 0 & \text{有半波损失} \\ n_1 > n_2, \theta_i < \theta_c \Rightarrow \theta_t > \theta_i \Rightarrow \dot{E}_{mr} / \dot{E}_{mi} > 0 & \text{无半波损失} \end{cases}$$

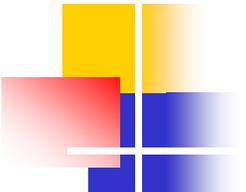
半波损失: 入射波电场强度与反射波电场强度符号相反, 即方向相反, 或者说相位相差 $\pm \pi$ (对应半个波长), 这样的现象称为“半波损失”, 它发生在当平面波由光疏介质到光密介质表面时。

§ 7.6 平面波的反射和折射

2、水平线极化波入射

平行于入射面的线极化波，只能产生平行线极化波的反射波和折射波。在交界面由边界条件（ \vec{E} , \vec{H} 切向分量连续）





§ 7.6 平面波的反射和折射

$$\dot{E}_{mi} \cos \theta_i - \dot{E}_{mr} \cos \theta_r = \dot{E}_{mt} \cos \theta_t \Rightarrow \dot{E}_{mr} + \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \dot{E}_{mt} = \dot{E}_{mi}$$

以左边为参考方向为正

$$\dot{H}_{mi} + \dot{H}_{mr} = \dot{H}_{mt}, \text{ 由 } \theta_i = \theta_r; \dot{H}_i = \frac{1}{\eta_1} \dot{E}_i; \dot{H}_r = \frac{1}{\eta_1} \dot{E}_r; \dot{H}_t = \frac{1}{\eta_2} \dot{E}_t$$

(注：波阻抗都取正号，因为 \dot{H} 的参考方向的选择已使 $\dot{E} \times \dot{H}$ 为传播方向)

$$\text{带入后得 } \dot{E}_{mr} - \frac{\eta_1}{\eta_2} \dot{E}_{mt} = -\dot{E}_{mi}, \quad \frac{\eta_1}{\eta_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1}$$

($\because \mu_1 = \mu_2 = \mu_0$)

§ 7.6 平面波的反射和折射

$$\therefore \frac{\dot{E}_{mr}}{\dot{E}_{mi}} = \frac{\eta_1 \cos \theta_i - \eta_2 \cos \theta_t}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t}$$

$$\stackrel{\mu_1 = \mu_2 = \mu_0}{=} \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \stackrel{\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{n_2}{n_1}}{=} \frac{\text{tg}(\theta_t - \theta_i)}{\text{tg}(\theta_t + \theta_i)}$$

$$\frac{\dot{E}_{mt}}{\dot{E}_{mi}} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t}$$

$$\stackrel{\mu_1 = \mu_2 = \mu_0}{=} \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \stackrel{\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{n_2}{n_1}}{=} \frac{2 \cos \theta_i \sin \theta_t}{\sin(\theta_t + \theta_i) \cos(\theta_i - \theta_t)}$$

→ 平行线极化波入射时的费涅尔公式

§ 7.6 平面波的反射和折射

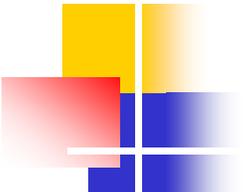
半波损失:

$$\theta_i \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\dot{E}_{mr}}{\dot{E}_{mi}} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1 < n_2 \Rightarrow \dot{E}_{mr} / \dot{E}_{mi} > 0 \quad \text{有半波损失} \\ n_1 > n_2 \Rightarrow \dot{E}_{mr} / \dot{E}_{mi} < 0 \quad \text{无半波损失} \end{array} \right.$$

$$\theta_i \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1 < n_2 \Rightarrow \dot{E}_{mr} / \dot{E}_{mi} = -1 \quad \text{有半波损失} \\ n_1 > n_2 \Rightarrow \text{介质2为非均匀平面波 } \dot{E}_{mr} / \dot{E}_{mi} = -1 \\ \quad \quad \quad \text{有半波损失} \end{array} \right.$$



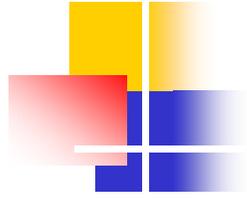
§ 7.6 平面波的反射和折射

3、任意的线极化波、椭圆极化波以及圆极化波都可分解为垂直极化波入射和水平极化波入射的叠加。

4、功率反射系数和传输系数

反射系数 R : 分界面上反射波的平均能流密度的法向分量与入射波的平均能流密度的法向分量之比。

传输系数 T : 分界面上折射波的平均能流密度的法向分量与入射波的平均能流密度的法向分量之比。

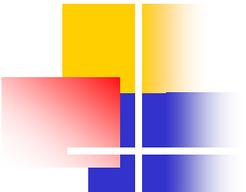


§ 7.6 平面波的反射和折射

$$\text{即 } R = \frac{\bar{S}_r \cdot \hat{n}}{\bar{S}_i \cdot (-\hat{n})} \quad T = \frac{\bar{S}_t \cdot (-\hat{n})}{\bar{S}_i \cdot (-\hat{n})}$$

对沿 \bar{k} 方向传播的均匀平面波

$$\bar{S} = \frac{1}{2\eta} |\dot{\bar{E}}|^2 \hat{k} \Rightarrow \begin{cases} \bar{S}_i \cdot (-\hat{n}) = \frac{1}{2\eta_1} |\dot{\bar{E}}_i|^2 \cos \theta_i \\ \bar{S}_r \cdot \hat{n} = \frac{1}{2\eta_1} |\dot{\bar{E}}_r|^2 \cos \theta_r \\ \bar{S}_t \cdot (-\hat{n}) = \frac{1}{2\eta_2} |\dot{\bar{E}}_t|^2 \cos \theta_t \end{cases}$$

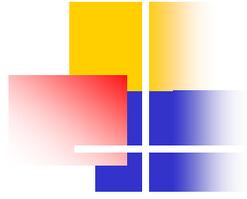


§ 7.6 平面波的反射和折射

$$\therefore R = \left| \frac{\dot{\vec{E}}_r}{\dot{\vec{E}}_i} \right|^2 \quad T = \frac{\eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i} \left| \frac{\dot{\vec{E}}_t}{\dot{\vec{E}}_i} \right|^2 \stackrel{\mu_1 = \mu_2 = \mu_0}{=} \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \left| \frac{\dot{\vec{E}}_t}{\dot{\vec{E}}_i} \right|^2$$

由此可得：

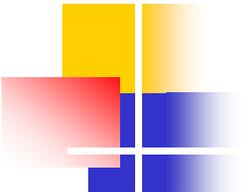
$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\perp} = \left(\frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right)^2 ; \quad T_{\perp} = \frac{4n_1 n_2 \cos \theta_i \cos \theta_t}{(n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t)^2} \\ R_{//} = \left(\frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \right)^2 ; \quad T_{//} = \frac{4n_1 n_2 \cos \theta_i \cos \theta_t}{(n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t)^2} \end{array} \right.$$



§ 7.6 平面波的反射和折射

$$\Rightarrow R + T = 1$$

符合能量守恒原理，因为我们研究的是无损情况，正入射的能量一部分穿过介质交界面进入介质2，转化为折射波能量，另一部分反射回来（一个周期平均效果）。



§ 7.6 平面波的反射和折射

三、布儒斯特角与全反射

1、布儒斯特角：考虑什么情况下反射为0？

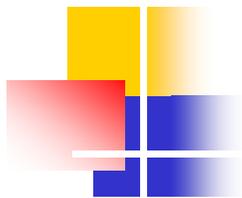
$$\left(\frac{\dot{E}_{mr}}{\dot{E}_{mi}} \right)_{\perp} = \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \quad \left(\frac{\dot{E}_{mr}}{\dot{E}_{mi}} \right)_{\parallel} = \frac{\text{tg}(\theta_t - \theta_i)}{\text{tg}(\theta_t + \theta_i)}$$

垂直极化：反射波不可能为0，除非 $n_1 = n_2$

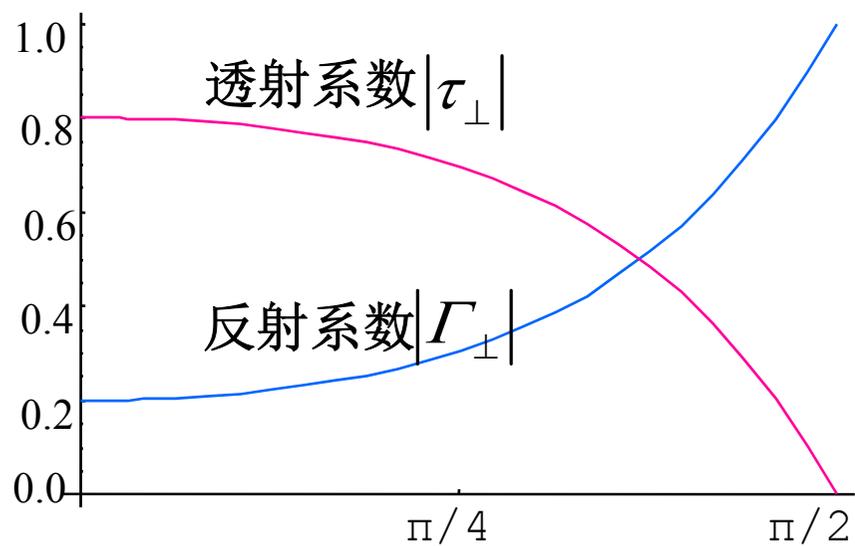
（即为同一介质）

平行极化： $\theta_t + \theta_i = \frac{\pi}{2}$ ，此时的入射角称为布儒

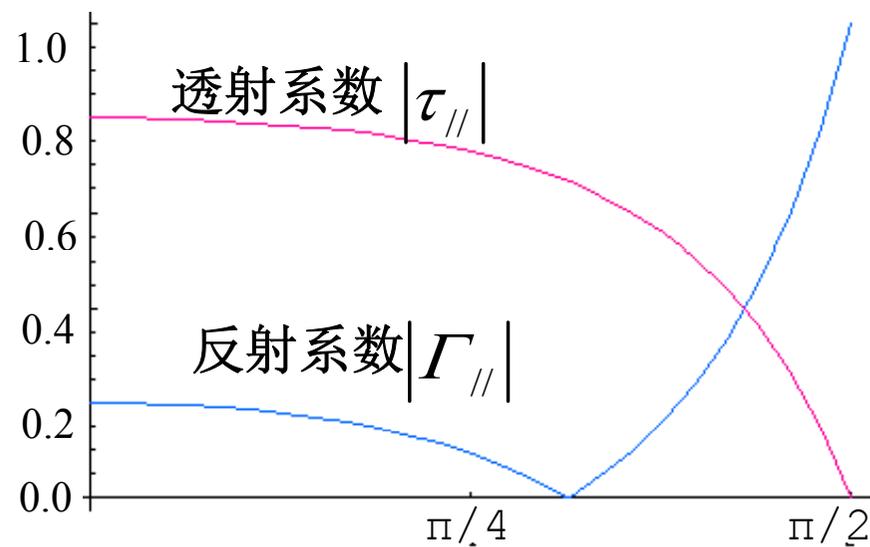
斯特角 $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t = n_2 \cos \theta_i \Rightarrow \theta_i = \text{tg}^{-1} \frac{n_2}{n_1}$

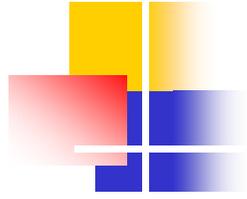


垂直极化波



平行极化波





§ 7.6 平面波的反射和折射

平行线极化的入射波由布儒斯特角入射时，反射波为0，这样任意极化（线极化、圆极化、椭圆极化）的平面波以布儒斯特角入射时，因任何极化都可以分解为垂直极化入射和平行极化入射的叠加，而平行极化入射时反射波为 0，最后只剩下垂直极化的反射波。因此布儒斯特角起到了将任意极化的平面波转化为垂直线极化波的作用。

§ 7.6 平面波的反射和折射

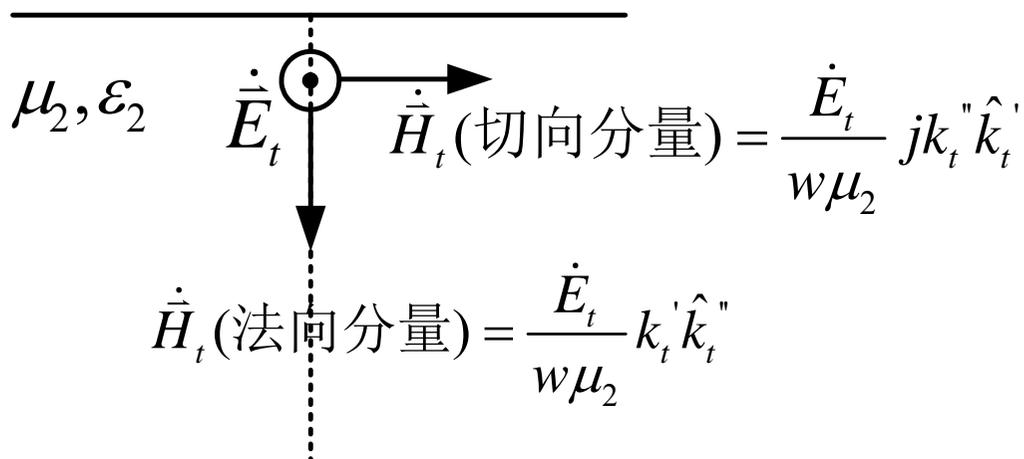
2、全反射 ($n_1 > n_2$) $\theta_i > \theta_c$ 时,
折射波为非均匀平面波

$$\begin{cases} \dot{\vec{E}} = \frac{1}{\omega \epsilon_k} \dot{\vec{H}} \times \vec{k} \\ \dot{\vec{H}} = \frac{1}{\omega \mu} \vec{k} \times \dot{\vec{E}} \end{cases}$$

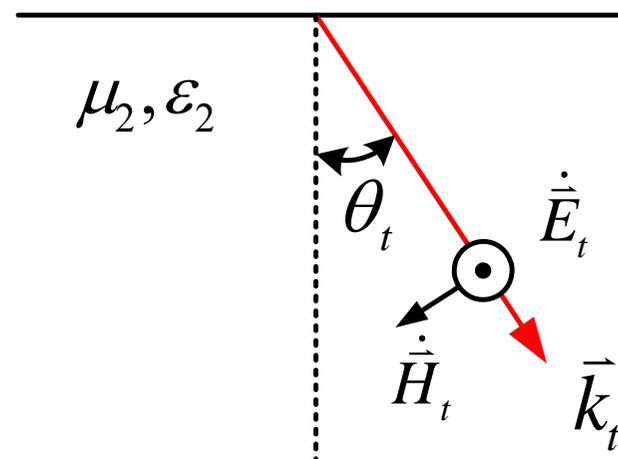
$$\vec{k}_2 = \vec{k}_t' - j\vec{k}_t''$$

(1) 垂直极化

全反射



非全反射



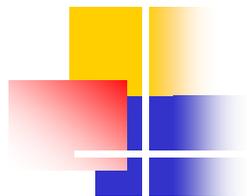
§ 7.6 平面波的反射和折射

$$\dot{\vec{H}}_t = \frac{\dot{\vec{E}}_t}{\omega\mu_2} (k_t' \hat{k}_t'' + jk_t'' \hat{k}_t') \quad \rightarrow \quad \dot{\vec{H}}_t = \frac{\dot{\vec{E}}_t}{\eta_2}$$

切向分量: $-\frac{jk_t'' \dot{E}_{mt}}{\omega\mu_2} = -\frac{jk_t''}{\eta_2 k_2} \dot{E}_{mt}$

\rightarrow 切向分量: $\dot{H}_{mt} \cos \theta_t = \frac{\dot{E}_{mt}}{\eta_2} \cos \theta_t$

\Rightarrow $-j \frac{k_t''}{k_2} \rightarrow \cos \theta_t$



§ 7.6 平面波的反射和折射

$$\frac{\dot{E}_{mr}}{\dot{E}_{mi}} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i + j\eta_1 \frac{k_t''}{k_2}}{\eta_2 \cos \theta_i - j\eta_1 \frac{k_t''}{k_2}} \stackrel{\mu_1 = \mu_2 = \mu_0}{=} \frac{n_1 \cos \theta_i + jn_2 \frac{k_t''}{k_2}}{n_1 \cos \theta_i - jn_2 \frac{k_t''}{k_2}}$$
$$\frac{\dot{E}_{mt}}{\dot{E}_{mi}} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i - j\eta_1 \frac{k_t''}{k_2}} \stackrel{\mu_1 = \mu_2 = \mu_0}{=} \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i - jn_2 \frac{k_t''}{k_2}}$$

§ 7.6 平面波的反射和折射

$$R = \left| \frac{\dot{\vec{E}}_r}{\dot{\vec{E}}_i} \right|^2 = 1 \quad \dot{\vec{S}}_t = \frac{1}{2} \dot{\vec{E}}_t \times \dot{\vec{H}}_t^* = \frac{1}{2\omega\mu_2} \left| \dot{\vec{E}}_t \right|^2 \vec{k}_2^*$$

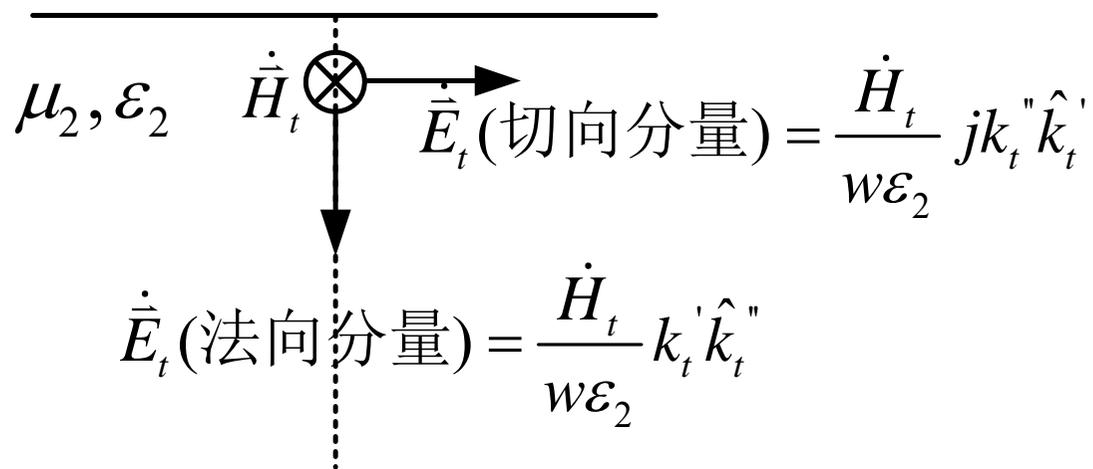
$$\bar{\vec{S}}_t = \frac{1}{2\omega\mu_2} \left| \dot{\vec{E}}_t \right|^2 \vec{k}_t' \Rightarrow \bar{\vec{S}}_t \cdot \hat{n} = 0 \Rightarrow T = 0$$

这说明投射到交界处的电磁场能量全部被反射回来，没有能量进入到介质2。介质2中的能流从无穷远处来到无穷远处去，而不是由介质1中的入射波提供。

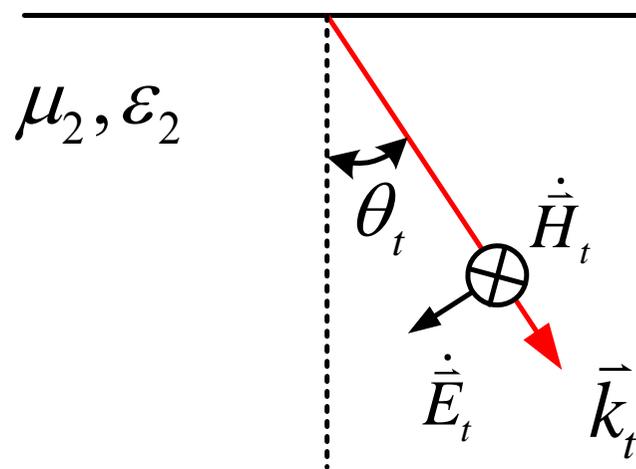
注：以上结论仅对稳定状态下的一个周期内的平均值而言。

§ 7.6 平面波的反射和折射

(2) 平行极化
全反射

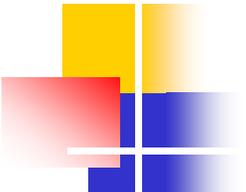


非全反射



切向分量: $-j\eta_2 \frac{k_t''}{k_2} \dot{H}_{mt}$ \rightarrow 切向分量: $\eta_2 \dot{H}_{mt} \cos \theta_t$

\Rightarrow $-j \frac{k_t''}{k_2}$ \rightarrow $\cos \theta_t$



§ 7.6 平面波的反射和折射

$$\frac{\dot{E}_{mr}}{\dot{E}_{mi}} = \frac{\eta_1 \cos \theta_i + j\eta_2 \frac{k_t''}{k_2}}{\eta_1 \cos \theta_i - j\eta_2 \frac{k_t''}{k_2}} \stackrel{\mu_1 = \mu_2 = \mu_0}{=} \frac{n_2 \cos \theta_i + jn_1 \frac{k_t''}{k_2}}{n_2 \cos \theta_i - jn_1 \frac{k_t''}{k_2}}$$

$$\frac{\dot{E}_{mt}}{\dot{E}_{mi}} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_1 \cos \theta_i - j\eta_2 \frac{k_t''}{k_2}} \stackrel{\mu_1 = \mu_2 = \mu_0}{=} \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i - jn_1 \frac{k_t''}{k_2}}$$

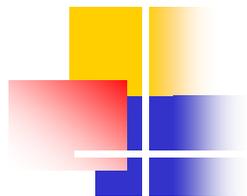
§ 7.6 平面波的反射和折射

$$R = \left| \frac{\dot{\vec{E}}_r}{\dot{\vec{E}}_i} \right|^2 = 1 \quad \dot{\vec{S}}_t = \frac{1}{2} \dot{\vec{E}}_t \times \dot{\vec{H}}_t^* = \frac{1}{2\omega\epsilon_2} \left| \dot{\vec{H}}_t \right|^2 \vec{k}_2$$

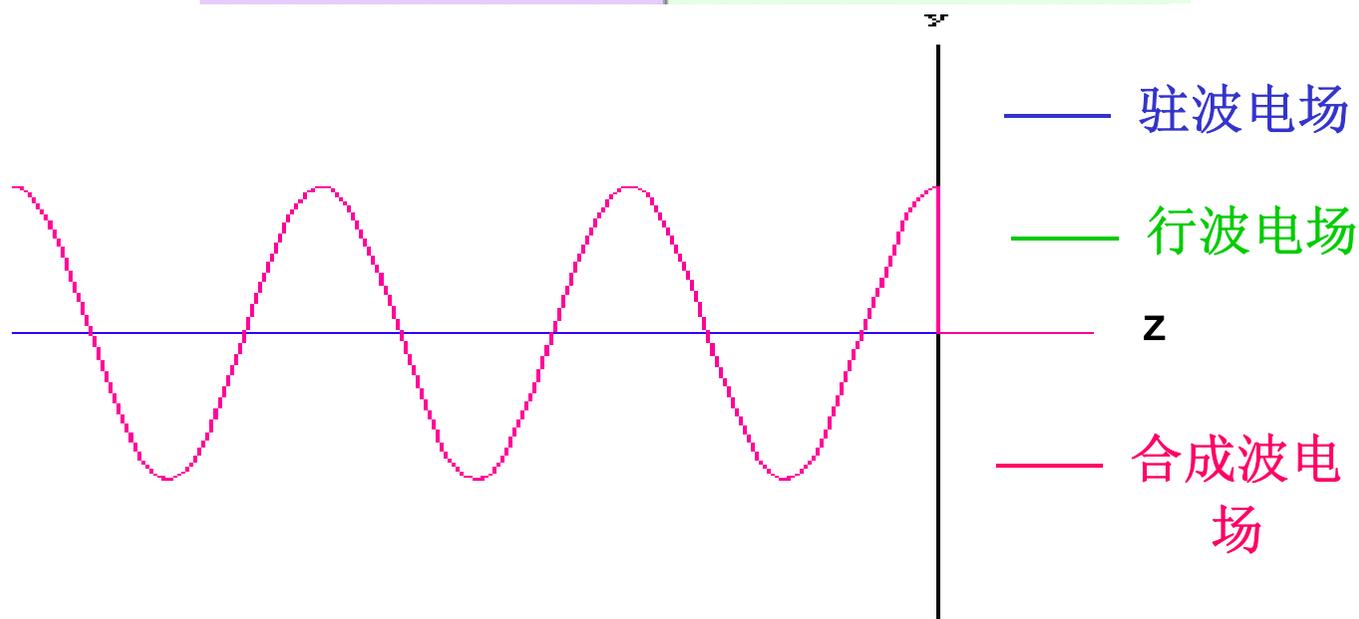
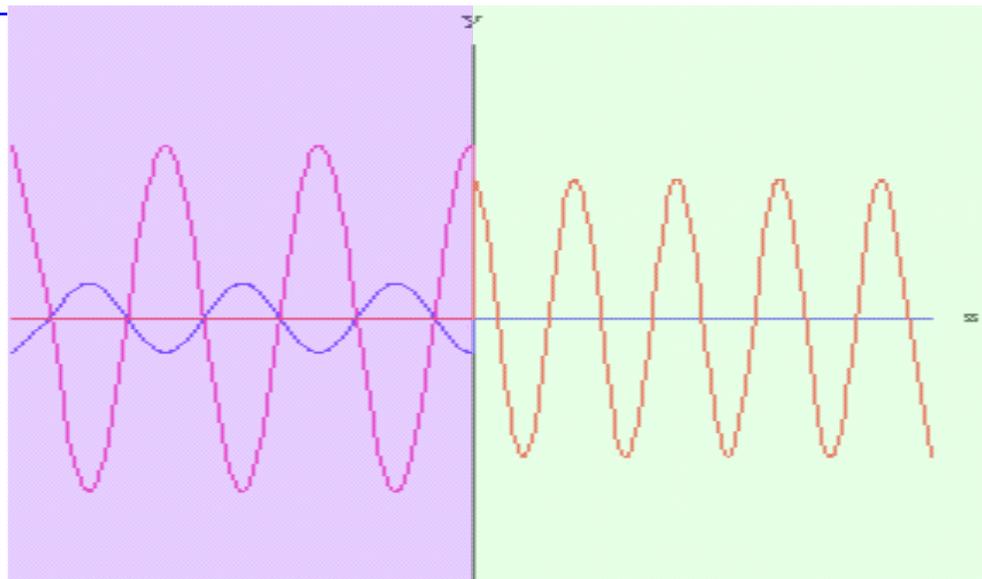
$$\bar{\vec{S}}_t = \frac{1}{2\omega\epsilon_2} \left| \dot{\vec{H}}_t \right|^2 \vec{k}_t \Rightarrow \bar{\vec{S}}_t \cdot \hat{n} = 0 \Rightarrow T = 0$$

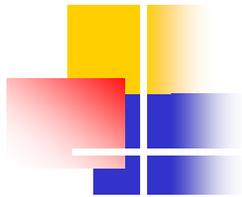
这说明投射到交界处的电磁场能量全部被反射回来，没有能量进入到介质2。介质2中的能流从无穷远处来到无穷远处去，而不是由介质1中的入射波提供。

注：以上结论仅对稳定状态下的一个周期内的平均值而言。



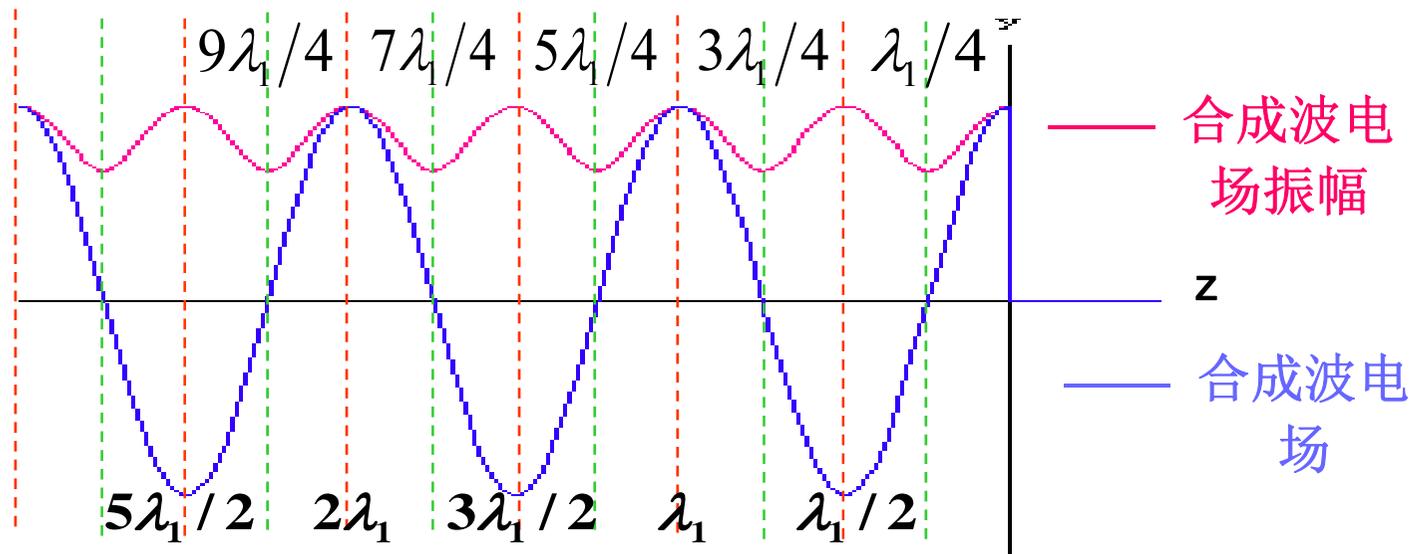
§ 7.6 平面波的反射和折射



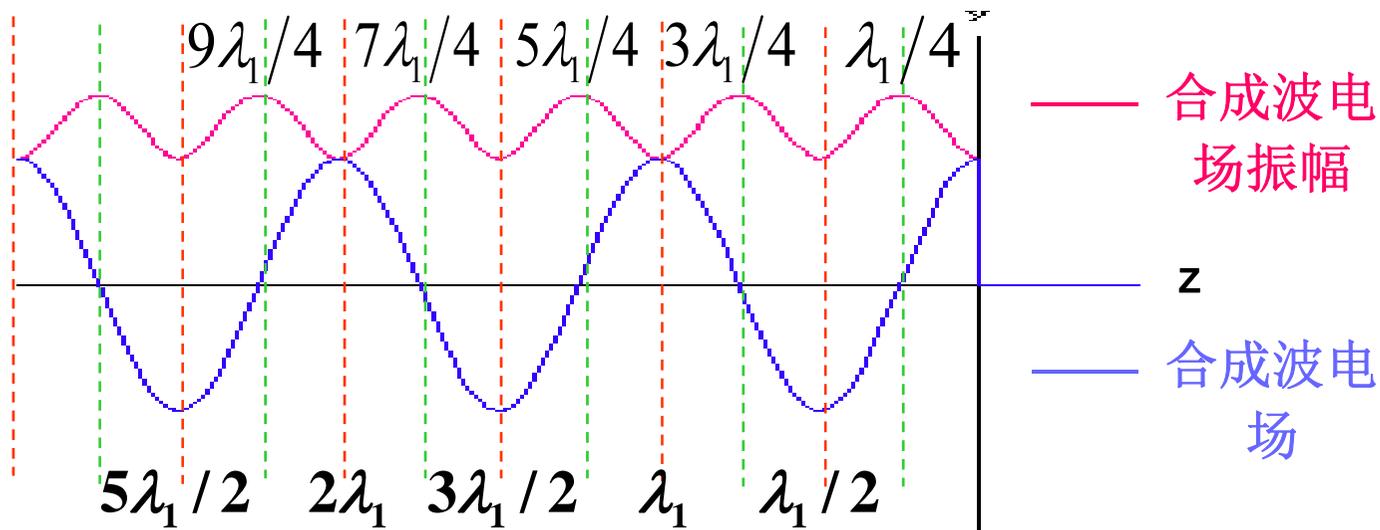


§ 7.6 平面波的反射和折射

$|R| > 0$



$|R| < 0$



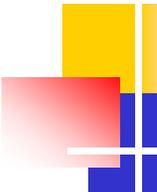
驻波系数(驻波比) S

驻波系数 S 定义为驻波的电场强度振幅的最大值与最小值之比，即

$$S = \frac{|\vec{E}|_{\max}}{|\vec{E}|_{\min}} = \frac{1 + |R|}{1 - |R|} \iff |R| = \frac{S - 1}{S + 1}$$

■ 讨论：

- 当 $\Gamma = 0$ 时， $S = 1$ ，为行波；
- 当 $\Gamma = \pm 1$ 时， $S = \infty$ ，是纯驻波。
- 当 $0 < |\Gamma| < 1$ 时， $1 < S < \infty$ ，为混合波。 S 越大，驻波分量越大，行波分量越小；



§ 7.7 平面波对理想导体的投射

$$\sigma = \infty$$

- ①平面波不能进入到理想导体内部（ \because 内部不存在时变电磁场）
- ②反射角等于入射角
- ③反射波的传播矢量、入射波的传播矢量及导体表面的法向在一个平面内。

§ 7.7 平面波对理想导体的投射

1、垂直极化波入射

$$\dot{\vec{E}}_i = \dot{E}_{mi} e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \hat{y}$$

$$\dot{\vec{E}}_r = \dot{E}_{mr} e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \hat{y}$$

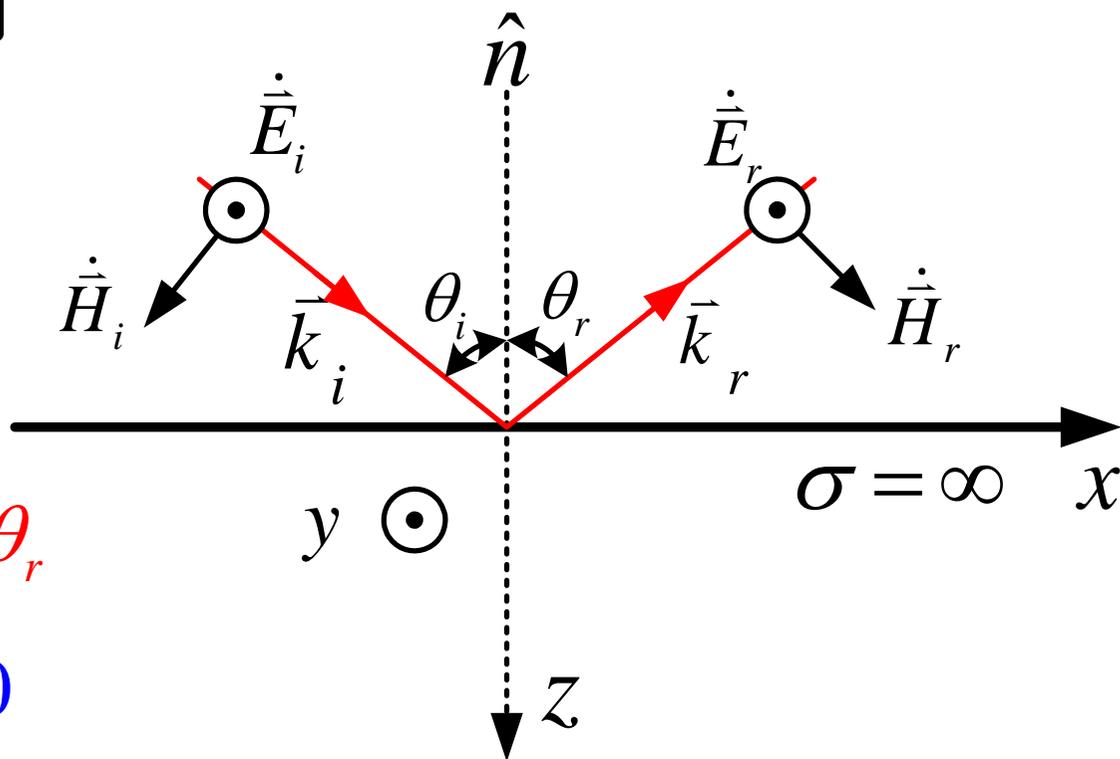
其中 $k_i = k_r = k$

$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_i + \dot{\vec{E}}_r \quad \theta_i = \theta_r$$

$$\text{边界条件} \begin{cases} \hat{n} \times \dot{\vec{E}} = 0 \\ \hat{n} \times \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{J}}_s \end{cases}$$

相位因子相等

$$z = 0 \text{ 时 } \dot{E}_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{E}_{mi} + \dot{E}_{mr} = 0$$



§ 7.7 平面波对理想导体的投射

$$\text{由} \begin{cases} \hat{k}_i = \cos \theta_i \hat{z} + \sin \theta_i \hat{x} \\ \hat{k}_r = -\cos \theta_i \hat{z} + \sin \theta_i \hat{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{k}_i \times \hat{y} = \sin \theta_i \hat{z} - \cos \theta_i \hat{x} \\ \hat{k}_r \times \hat{y} = \sin \theta_i \hat{z} + \cos \theta_i \hat{x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \dot{\vec{E}} &= \dot{\vec{E}}_i + \dot{\vec{E}}_r = \dot{E}_{mi} (e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} - e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}}) \hat{y} \\ &= \dot{E}_{mi} (e^{-jkz \cos \theta_i} - e^{jkz \cos \theta_i}) e^{-jkx \sin \theta_i} \hat{y} \\ &= -2j\dot{E}_{mi} \sin(kz \cos \theta_i) e^{-jkx \sin \theta_i} \hat{y} \end{aligned}$$

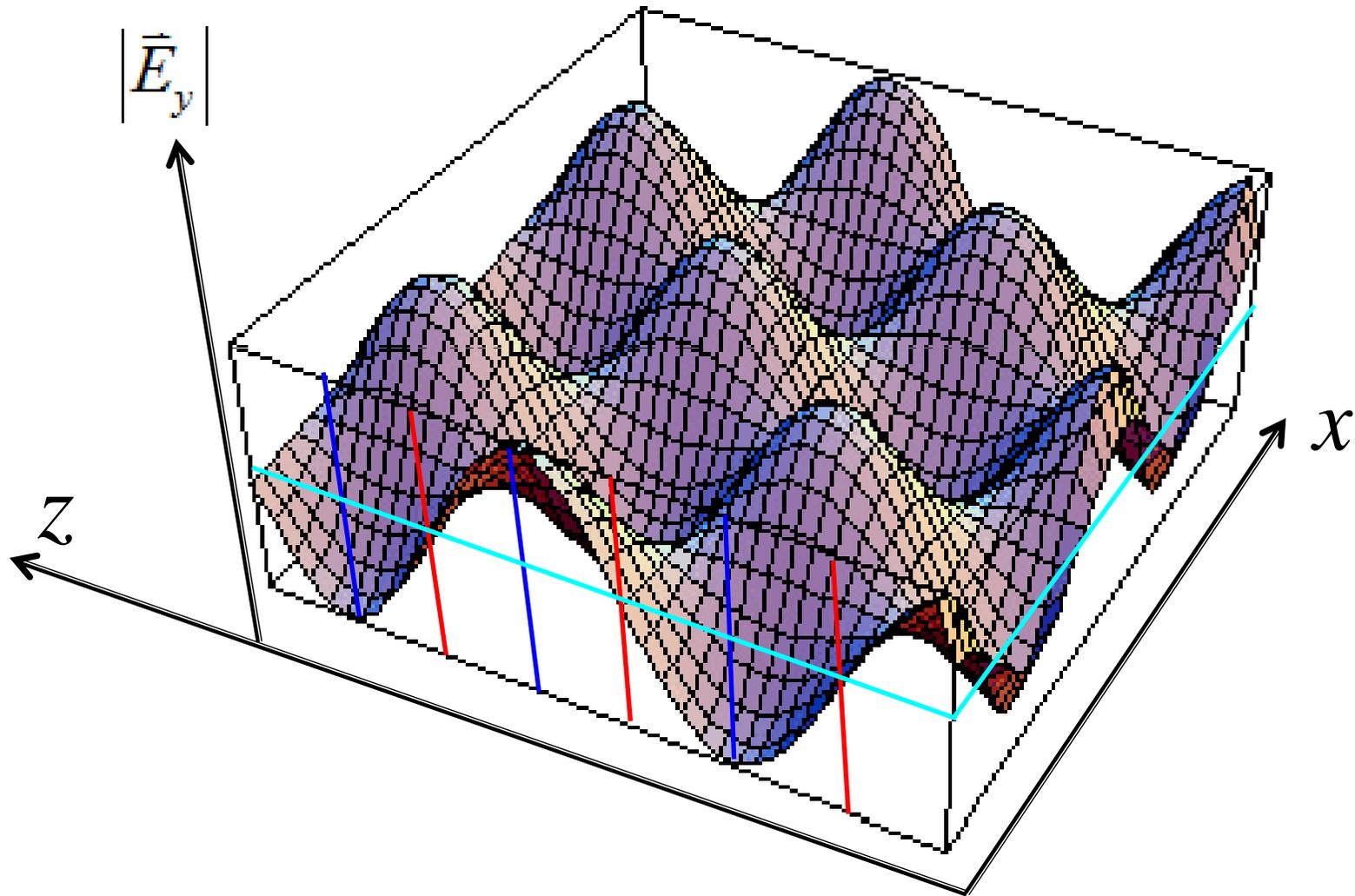
$$\text{由} \dot{\vec{H}}_i = \frac{1}{\eta} \hat{k}_i \times \dot{\vec{E}}_i; \dot{\vec{H}}_r = \frac{1}{\eta} \hat{k}_r \times \dot{\vec{E}}_r$$

§ 7.7 平面波对理想导体的投射

$$\begin{aligned}\dot{\hat{H}} &= \dot{\hat{H}}_i + \dot{\hat{H}}_r = \frac{\dot{\hat{E}}_i}{\eta} (\hat{k}_i \times \hat{y}) + \frac{\dot{\hat{E}}_r}{\eta} (\hat{k}_r \times \hat{y}) \\ &= \frac{1}{\eta} \{ \sin \theta_i (\dot{E}_i + \dot{E}_r) \hat{z} - \cos \theta_i (\dot{E}_i - \dot{E}_r) \hat{x} \} \\ &= \frac{-2\dot{E}_{mi}}{\eta} \{ j \sin \theta_i \sin(kz \cos \theta_i) \hat{z} \\ &\quad + \cos \theta_i \cos(kz \cos \theta_i) \hat{x} \} e^{-jkx \sin \theta_i}\end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned} \because \dot{E}_i - \dot{E}_r &= \dot{E}_{mi} (e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} + e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}}) \\ &= \dot{E}_{mi} (e^{-jkz \cos \theta_i} + e^{jkz \cos \theta_i}) e^{-jkx \sin \theta_i} \\ &= 2\dot{E}_{mi} \cos(kz \cos \theta_i) e^{-jkx \sin \theta_i} \end{aligned} \right)$$

§ 7.7 平面波对理想导体的投射



§ 7.7 平面波对理想导体的投射

总场特点 ($z < 0$) :

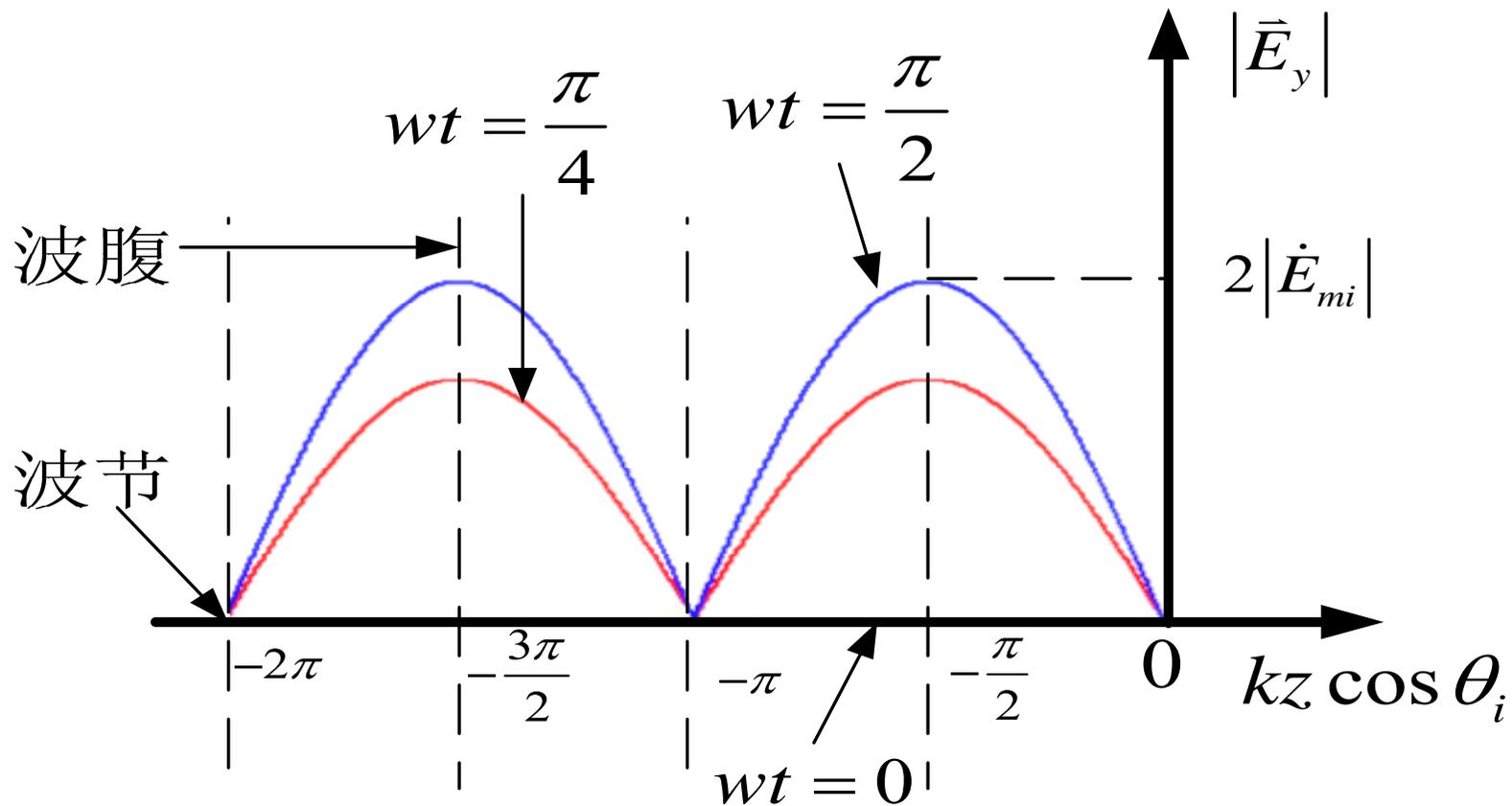
(1) 在 x 方向上为行波分布, 传播的相速度为

$$v_{px} = \frac{\omega}{k \sin \theta_i} = \frac{v_p}{\sin \theta_i} \quad \text{其中 } v_p \text{ 为媒质1中的光速}$$

$\because \sin \theta_i \leq 1 \Rightarrow v_{px} \geq v_p$, 通常称之为快波。又因为此行波的振幅是随 z 变化的, 所以为**非均匀平面波**。

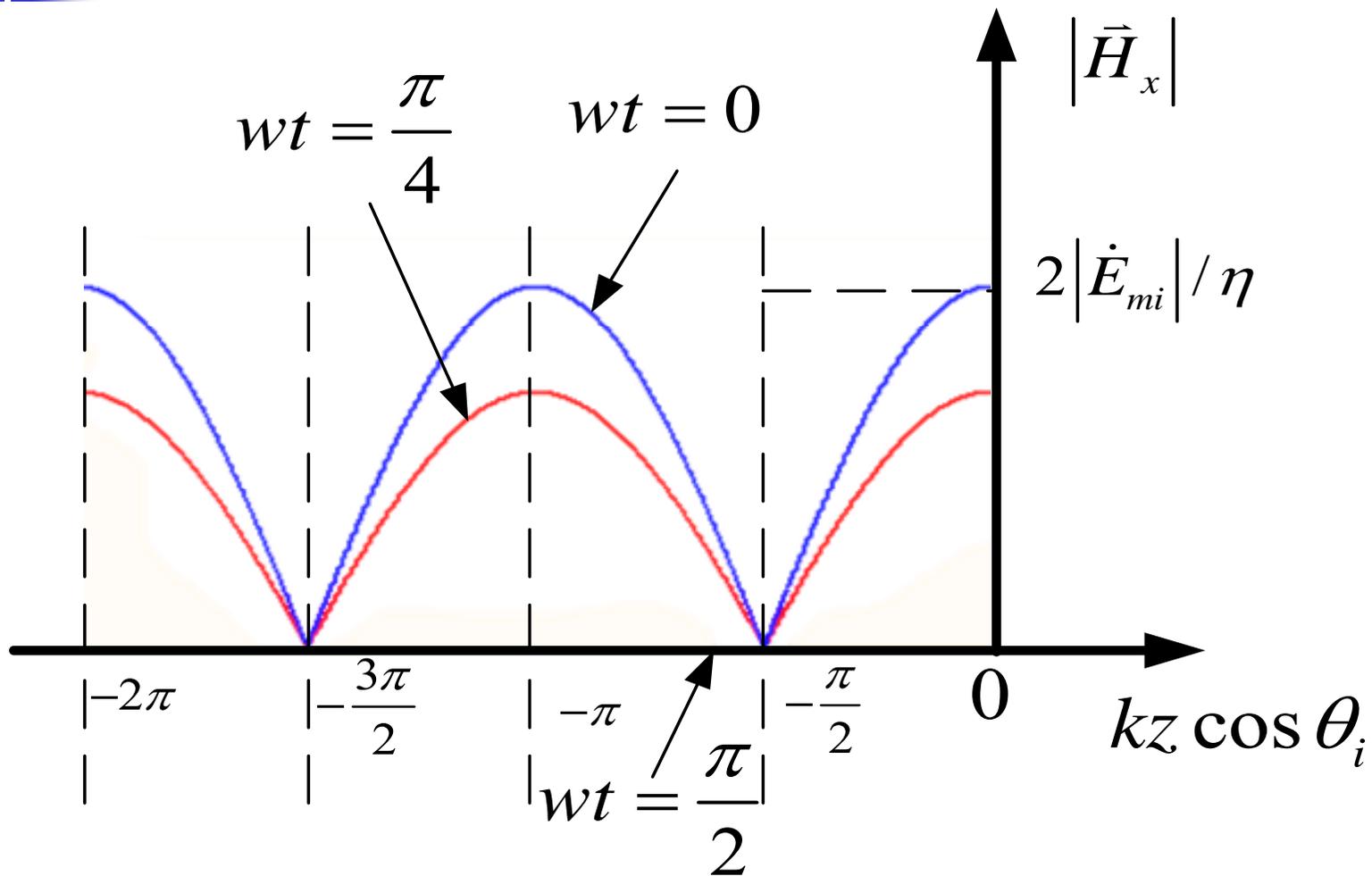
在 z 方向上, \dot{E}_y 和 \dot{H}_x 以**驻波形式**分布。

§ 7.7 平面波对理想导体的投射

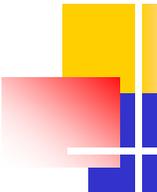


$$|\vec{E}_y(0, z, t)| = 2|\dot{E}_{mi}| \sin(kz \cos \theta_i) \sin(\omega t) \hat{y}$$

§ 7.7 平面波对理想导体的投射



$$|\vec{H}_x(0, z, t)| = 2 \frac{|\dot{E}_{mi}|}{\eta} \cos(kz \cos \theta_i) \cos(wt) \hat{x}$$



§ 7.7 平面波对理想导体的投射

波节点： 在任意时刻，电场强度的值总为零的点。

波腹点： 任意时刻，电场强度的值为最大的点。

驻波： 这种波节点和波腹点位置固定的波称为驻波。

即没有随空间的相移，而是随空间振荡型分布， z 方向空间各点“同相位”，入射波和反射波的相位延迟效应抵消。

§ 7.7 平面波对理想导体的投射

(2) z 方向平均能流密度为0, 即 z 方向功率传输为0

x 方向平均能流密度不为0, 即 x 方向功率传输不为0

$$\therefore \bar{S}_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\dot{E}_y \hat{y} \times \dot{H}_x^* \hat{x}] = 0$$

(因为 \dot{E}_y 和 \dot{H}_x 有 $\frac{\pi}{2}$ 的相位差或者由 $R = 1$ 推出)

$$\therefore \bar{S}_x = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\dot{E}_y \hat{y} \times \dot{H}_z^* \hat{z}] \neq 0 \text{ (因为 } \dot{E}_y \text{ 和 } \dot{H}_z \text{ 相位完全相同)}$$

且 \bar{S}_x 为 $+x$ 方向, 即 $+x$ 方向代表总场等相位面和能量的传输方向

(3) 电场强度在波的传播方向上无分量, 即 $\dot{E}_x = 0$

称为横电波 (TE波)

§ 7.7 平面波对理想导体的投射

2、水平极化波入射

$$\dot{\vec{E}}_i = \dot{E}_{mi} e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} (\hat{k}_i \times \hat{y})$$

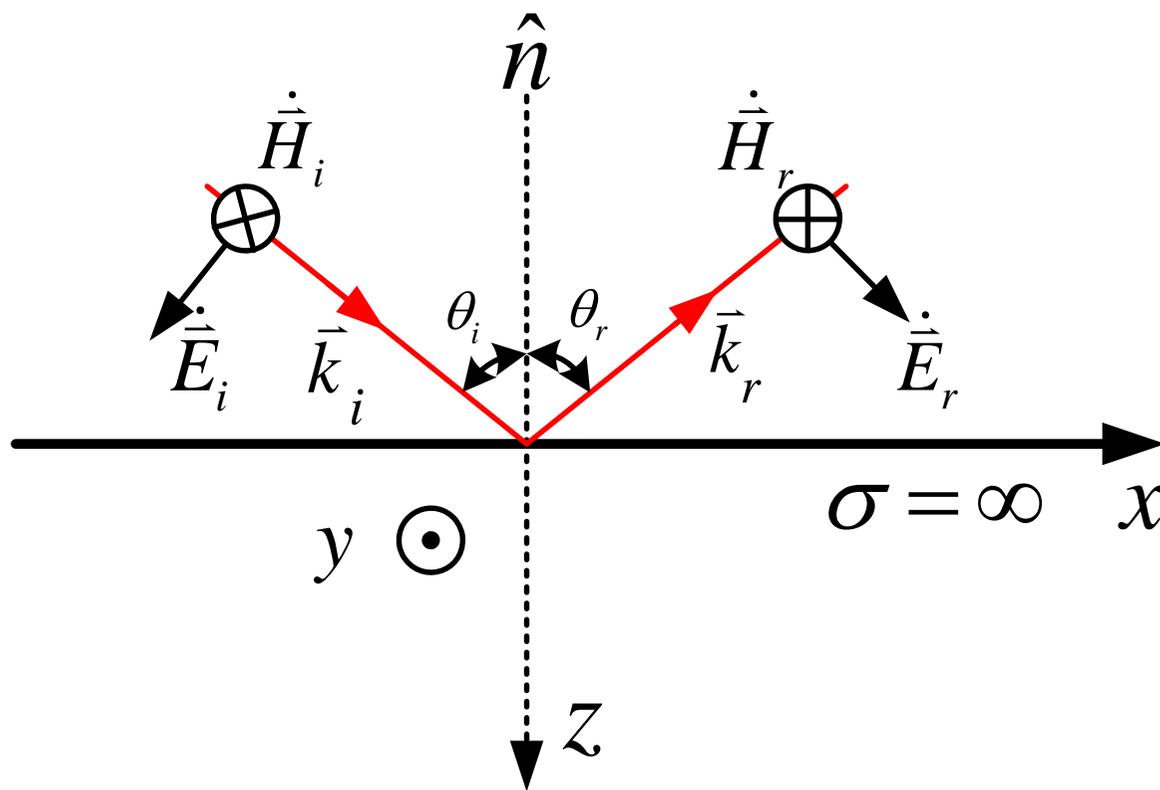
$$\dot{\vec{E}}_r = \dot{E}_{mr} e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}} (\hat{k}_r \times \hat{y})$$

其中 $k_i = k_r = k$

$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_i + \dot{\vec{E}}_r \quad \theta_i = \theta_r$$

$$\text{边界条件} \begin{cases} \hat{n} \times \dot{\vec{E}} = 0 \\ \hat{n} \times \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{J}}_s \end{cases}$$

$$z = 0 \text{ 时 } \dot{E}_x = 0 \quad \overset{\text{相位因子相等}}{\Rightarrow} \quad \dot{E}_{mi} = \dot{E}_{mr}$$



§ 7.7 平面波对理想导体的投射

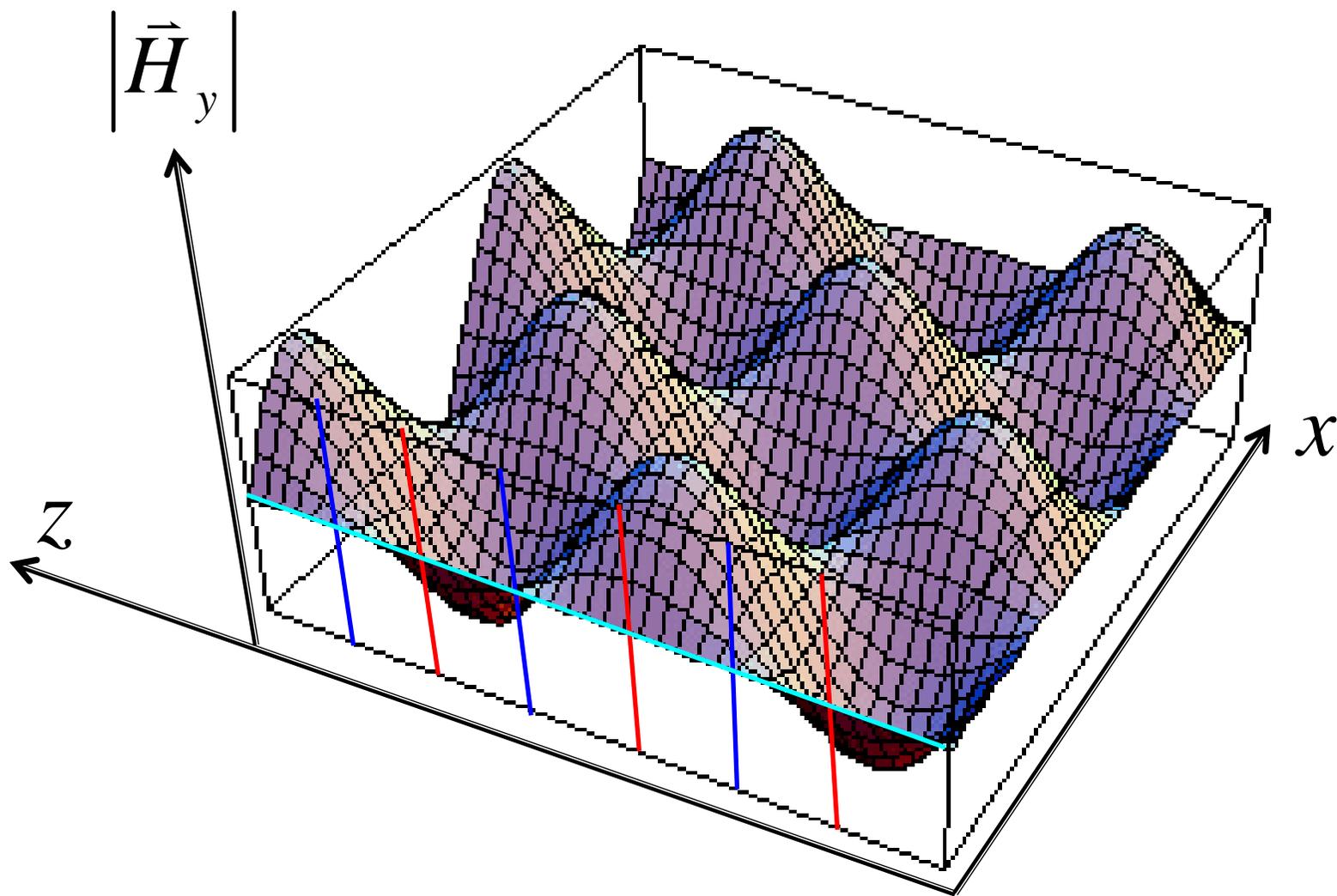
$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_i + \dot{\vec{E}}_r = \dot{E}_{mi} \left\{ \sin \theta_i (e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} + e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}}) \hat{z} - \cos \theta_i (e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} - e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}}) \hat{x} \right\}$$

$$= 2\dot{E}_{mi} \left\{ \sin \theta_i \cos(kz \cos \theta_i) \hat{z} + j \cos \theta_i \sin(kz \cos \theta_i) \hat{x} \right\} e^{-jkx \sin \theta_i}$$

$$\dot{\vec{H}} = \dot{\vec{H}}_i + \dot{\vec{H}}_r = \frac{\dot{E}_i}{\eta} (-\hat{y}) + \frac{\dot{E}_r}{\eta} (-\hat{y})$$

$$= -2 \frac{\dot{E}_{mi}}{\eta} \cos(kz \cos \theta_i) e^{-jkx \sin \theta_i} \hat{y}$$

§ 7.7 平面波对理想导体的投射



§ 7.7 平面波对理想导体的投射

总场特点 ($z < 0$) :

(1) 在 x 方向上为行波分布，传播的相速度为

$$v_{px} = \frac{\omega}{k \sin \theta_i} = \frac{v_p}{\sin \theta_i} \quad \text{其中 } v_p \text{ 为媒质1中的光速}$$

$\because \sin \theta_i \leq 1 \Rightarrow v_{px} \geq v_p$ ，通常称之为快波。又因为此行波的振幅是随 z 变化的，所以为**非均匀平面波**。

在 z 方向上， \dot{E}_x 和 \dot{H}_y 以驻波形式分布。

(2) z 方向平均能流密度为0，即 z 方向功率传输为0

x 方向平均能流密度不为0，即 x 方向功率传输不为0

§ 7.7 平面波对理想导体的投射

$$\therefore \bar{S}_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\dot{E}_x \hat{x} \times \dot{H}_{-y}^* \hat{y}] = 0$$

(因为 \dot{E}_x 和 \dot{H}_{-y} 有 $\frac{\pi}{2}$ 的相位差或者由 $R = 1$ 推出)

$$\therefore \bar{S}_x = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\dot{E}_z \hat{z} \times \dot{H}_{-y}^* \hat{y}] \neq 0 \text{ (因为 } \dot{E}_z \text{ 和 } \dot{H}_{-y} \text{ 相位完全相同)}$$

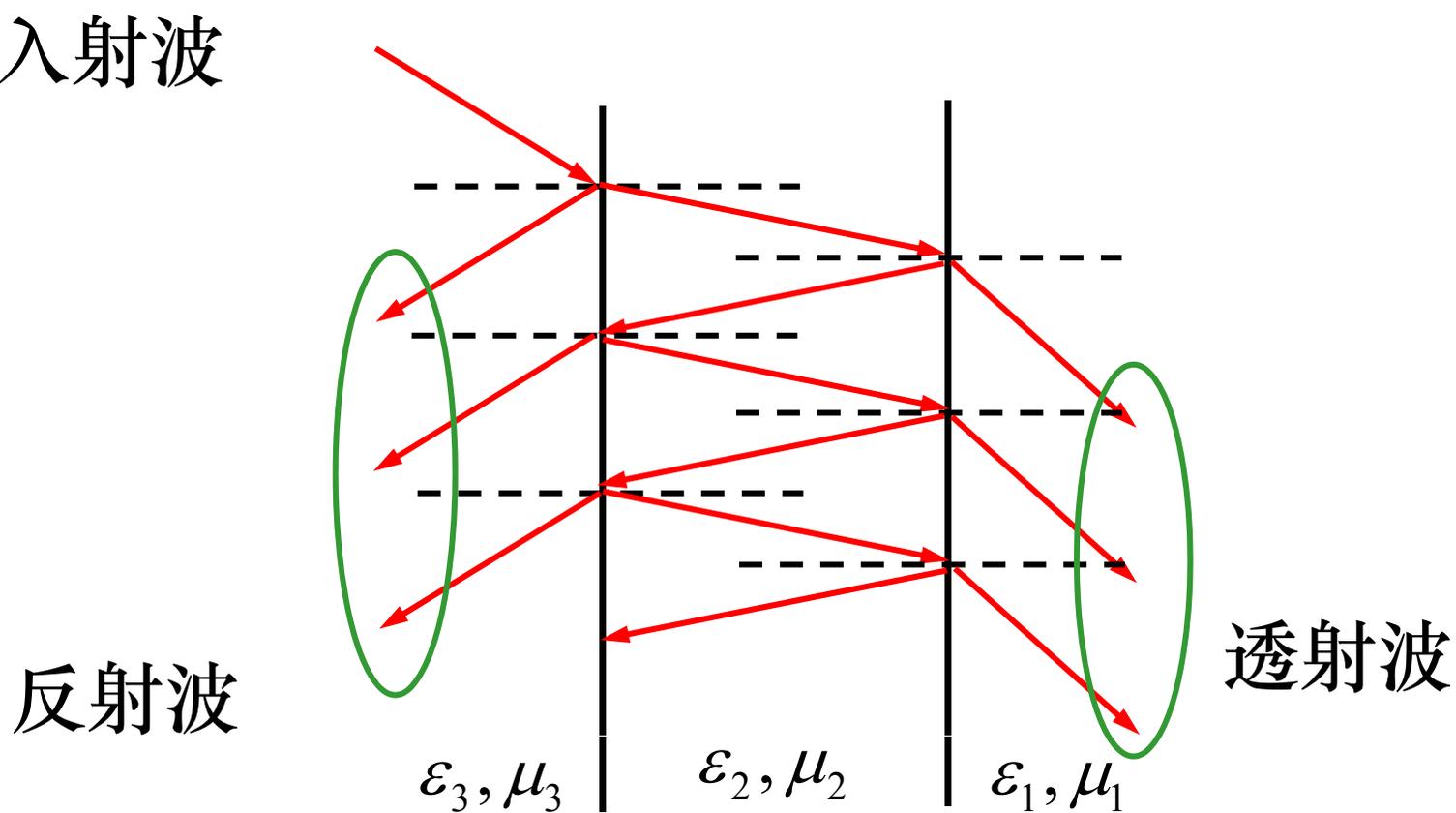
且 \bar{S}_x 为 $+x$ 方向，即 $+x$ 方向代表总场等相位面和能量的传输方向

(3) 磁场强度在波的传播方向上无分量，即 $\dot{H}_x = 0$
称为横磁波 (TM波)

§ 7.8 多层介质的反射和折射

在工程实际中，多层介质的应用很广：如雷达罩、频率选择表面、吸波涂层等。

入射波



§ 7.8 多层介质的反射和折射

法向波阻抗定义： 相对于媒质界面的法向分量成右手定则的一对行波电场强度与磁场强度的正交分量的比值。

平行极化波的法向波阻抗：

$$\eta_j = \frac{E_j \cos \theta_j}{H_j} = \frac{E_j \cos \theta_j}{E_j / \eta_{cj}} = \eta_{cj} \cos \theta_j$$

垂直极化波的法向波阻抗：

$$\eta_j = \frac{E_j}{H_j \cos \theta_j} = \frac{E_j}{(E_j / \eta_{cj}) \cos \theta_j} = \frac{\eta_{cj}}{\cos \theta_j}$$

其中“ j ”表示媒质层的标号。

§ 7.8 多层介质的反射和折射

E_j, H_j 表示第 j 层媒质中的电场和磁场

η_{cj} 为第 j 层波阻抗, 即 $\eta_{cj} = \sqrt{\frac{\mu_j}{\epsilon_j}}$

以垂直极化波为例:

令 $\beta_j = k_j \cos \theta_j$, 其中 j 为媒质层的标号

$$\text{故 } \dot{E}_{1y} = \dot{F} e^{j\beta_1 z - jk_1 \sin \theta_1 x} \hat{y} \Rightarrow \dot{H}_{1x} = \frac{\dot{F}}{\eta_1} e^{j\beta_1 z - jk_1 \sin \theta_1 x} \hat{x}$$

$$\dot{E}_{2y} = \left(\dot{A} e^{j\beta_2 z} + \dot{B} e^{-j\beta_2 z} \right) e^{-jk_2 \sin \theta_2 x} \hat{y}$$

$$\Rightarrow \dot{H}_{2x} = \frac{1}{\eta_2} \left(\dot{A} e^{j\beta_2 z} - \dot{B} e^{-j\beta_2 z} \right) e^{-jk_2 \sin \theta_2 x} \hat{x}$$

§ 7.8 多层介质的反射和折射

$$\dot{\vec{E}}_{3y} = \left(\dot{C}e^{j\beta_3(z-d)} + \dot{D}e^{-j\beta_3(z-d)} \right) e^{-jk_3 \sin \theta_3 x} \hat{y}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{H}}_{3x} = \frac{1}{\eta_3} \left(\dot{C}e^{j\beta_3(z-d)} - \dot{D}e^{-j\beta_3(z-d)} \right) e^{-jk_3 \sin \theta_3 x} \hat{x}$$

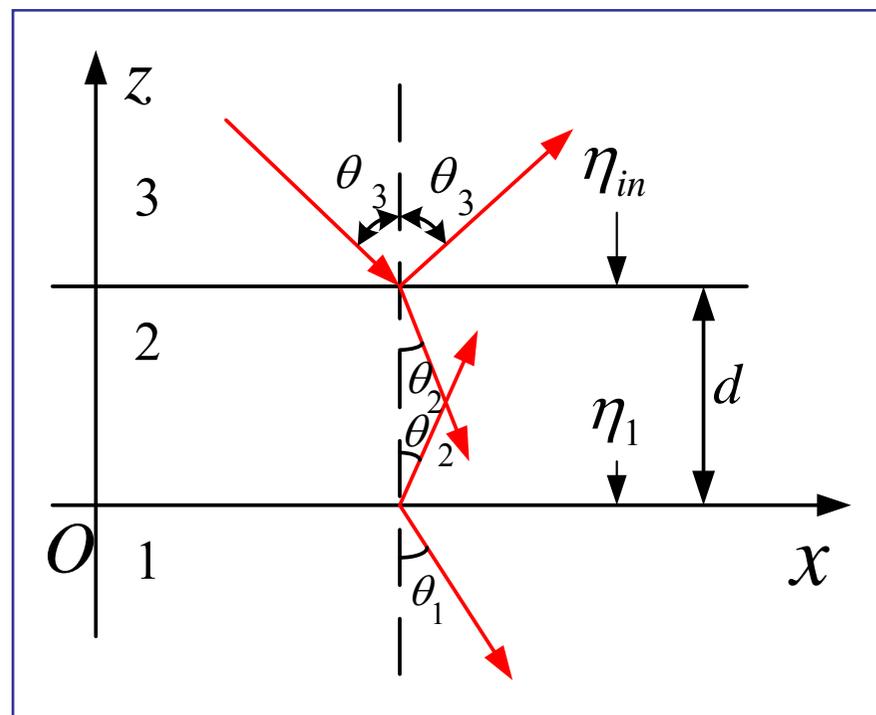
根据边界条件

$$z = 0 \text{ 时, } \dot{\vec{E}}_{2y} = \dot{\vec{E}}_{1y}, \dot{\vec{H}}_{2x} = \dot{\vec{H}}_{1x}$$

$$\left. \frac{\dot{E}_{2y}}{\dot{H}_{2x}} \right|_{z=0} = \eta_2 \frac{\dot{A} + \dot{B}}{\dot{A} - \dot{B}} = \left. \frac{\dot{E}_{1y}}{\dot{H}_{1x}} \right|_{z=0} = \eta_1$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{B}}{\dot{A}} = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2}$$

$$z = d \text{ 处, } \left. \frac{\dot{E}_{2y}}{\dot{H}_{2x}} \right|_{z=d} = \eta_2 \frac{\dot{A}e^{j\beta_2 d} + \dot{B}e^{-j\beta_2 d}}{\dot{A}e^{j\beta_2 d} - \dot{B}e^{-j\beta_2 d}} = \eta_2 \frac{\eta_1 + j\eta_2 \tan \beta_2 d}{\eta_2 + j\eta_1 \tan \beta_2 d}$$



§ 7.8 多层介质的反射和折射

根据边界条件： $z = d$ 时， $\dot{E}_{2y} = \dot{E}_{3y}$ ， $\dot{H}_{2x} = \dot{H}_{3x}$

$$\left. \frac{\dot{E}_{3y}}{\dot{H}_{3x}} \right|_{z=d} = \left. \frac{\dot{E}_{2y}}{\dot{H}_{2x}} \right|_{z=d} = \eta_3 \frac{\dot{C} + \dot{D}}{\dot{C} - \dot{D}} = \eta_2 \frac{\eta_1 + j\eta_2 \tan \beta_2 d}{\eta_2 + j\eta_1 \tan \beta_2 d} = \eta_{in}$$

$$\Rightarrow R_E = \frac{\dot{E}_{r,3}}{\dot{E}_{i,3}} = \frac{\dot{D}}{\dot{C}} = \frac{\eta_{in} - \eta_3}{\eta_{in} + \eta_3}$$

$$= \frac{(\eta_1 + \eta_2)(\eta_2 - \eta_3)e^{j\beta_2 d} + (\eta_1 - \eta_2)(\eta_2 + \eta_3)e^{-j\beta_2 d}}{(\eta_1 + \eta_2)(\eta_2 + \eta_3)e^{j\beta_2 d} + (\eta_1 - \eta_2)(\eta_2 - \eta_3)e^{-j\beta_2 d}}$$

§ 7.8 多层介质的反射和折射

由边界条件： $z = 0$ 处， $\dot{F} = (\dot{A} + \dot{B})$

$z = d$ 处 $(\dot{C} + \dot{D}) = (\dot{A}e^{j\beta_2 d} + \dot{B}e^{-j\beta_2 d})$

$$\Rightarrow \frac{\dot{F}}{\dot{C}(1 + R_E)} = \frac{\dot{A} + \dot{B}}{\dot{A}e^{j\beta_2 d} + \dot{B}e^{-j\beta_2 d}}$$

$$\Rightarrow W_E = \frac{\dot{F}}{\dot{C}} = \frac{1 + R_E}{\cos(\beta_2 d) + j \frac{\eta_2}{\eta_1} \sin(\beta_2 d)}$$

§ 7.8 多层介质的反射和折射

垂直投射时

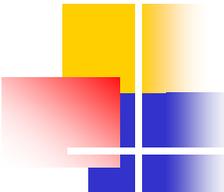
(1) 若 d 为半波长的整数倍

$$\Rightarrow 2\beta_2 d = 2k_2 d = 2m\pi \quad (m = 1, 2, \dots) \Rightarrow d = m \frac{\lambda_2}{2}$$

$$\Rightarrow R_E = \frac{\eta_1 - \eta_3}{\eta_1 + \eta_3} = R_{13}, \text{ 即等效于介质2不存在}$$

此时，若介质1和介质3为同种介质，则无反射

对给定的工作频率，当介质层厚度为介质的半波长的整数倍时，无反射发生，因此这种介质层称为半波介质窗。



§ 7.8 多层介质的反射和折射

(2) 若 d 为四分之一波长的奇数倍

$$\Rightarrow 2\beta_2 d = 2k_2 d = m\pi \quad (m = 1, 3, 5, \dots) \Rightarrow d = m \frac{\lambda_2}{4}$$

$$\Rightarrow R_E = \frac{\eta_2^2 - \eta_1 \eta_3}{\eta_2^2 + \eta_1 \eta_3}$$

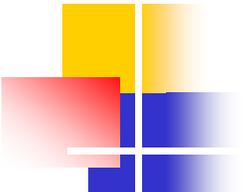
此时，若 $\eta_2 = \sqrt{\eta_1 \eta_3}$ ，则无反射

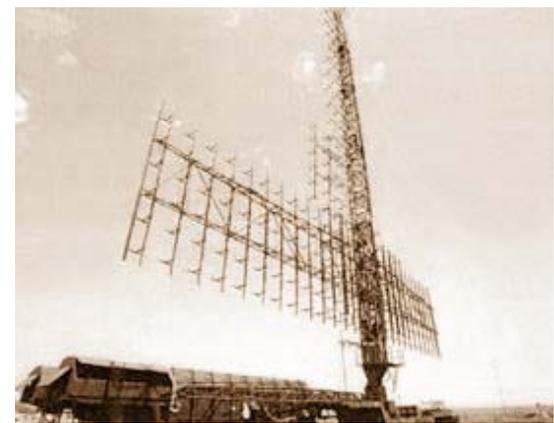
——四分之一波长阻抗变换器

电磁波的应用

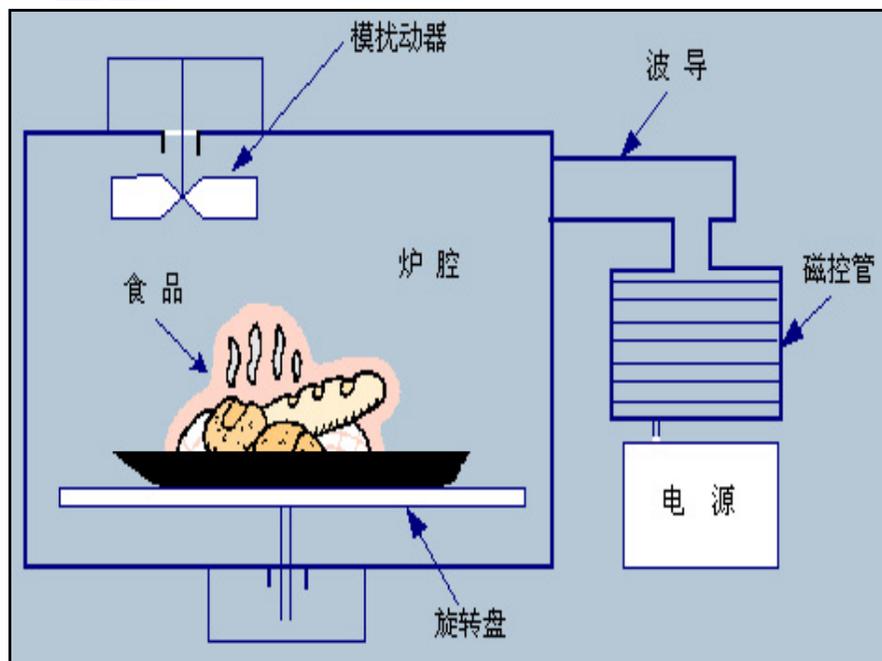
- 在发现电磁波不到6年，利用电磁波的技术，如雨后春笋般相继问世。
- 无线电报（1894年）
- 无线电广播（1906年）
- 无线电导航（1911年）
- 无线电话（1916年）



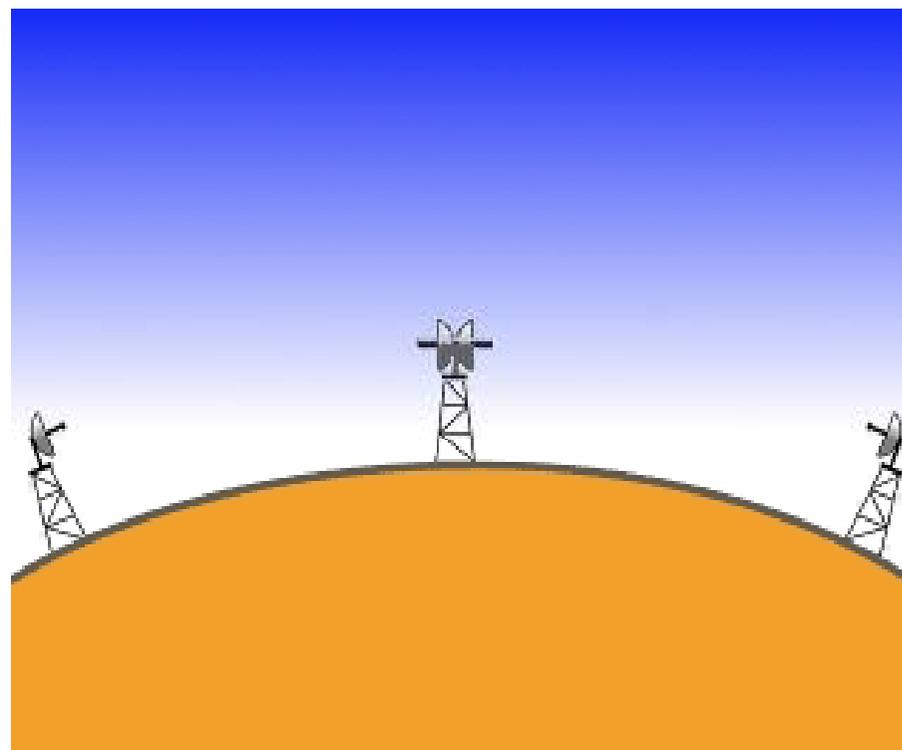
- 
- 短波通信 (1921年)
 - 无线电传真 (1923年)
 - 电视 (1929年)
 - 微波通信 (1933年)
 - 雷达 (1935年)
 - 遥控、遥感、卫星通信、射电天文学……它们使整个世界面貌发生了深刻的变化。

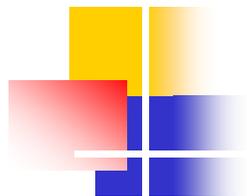


微波加热

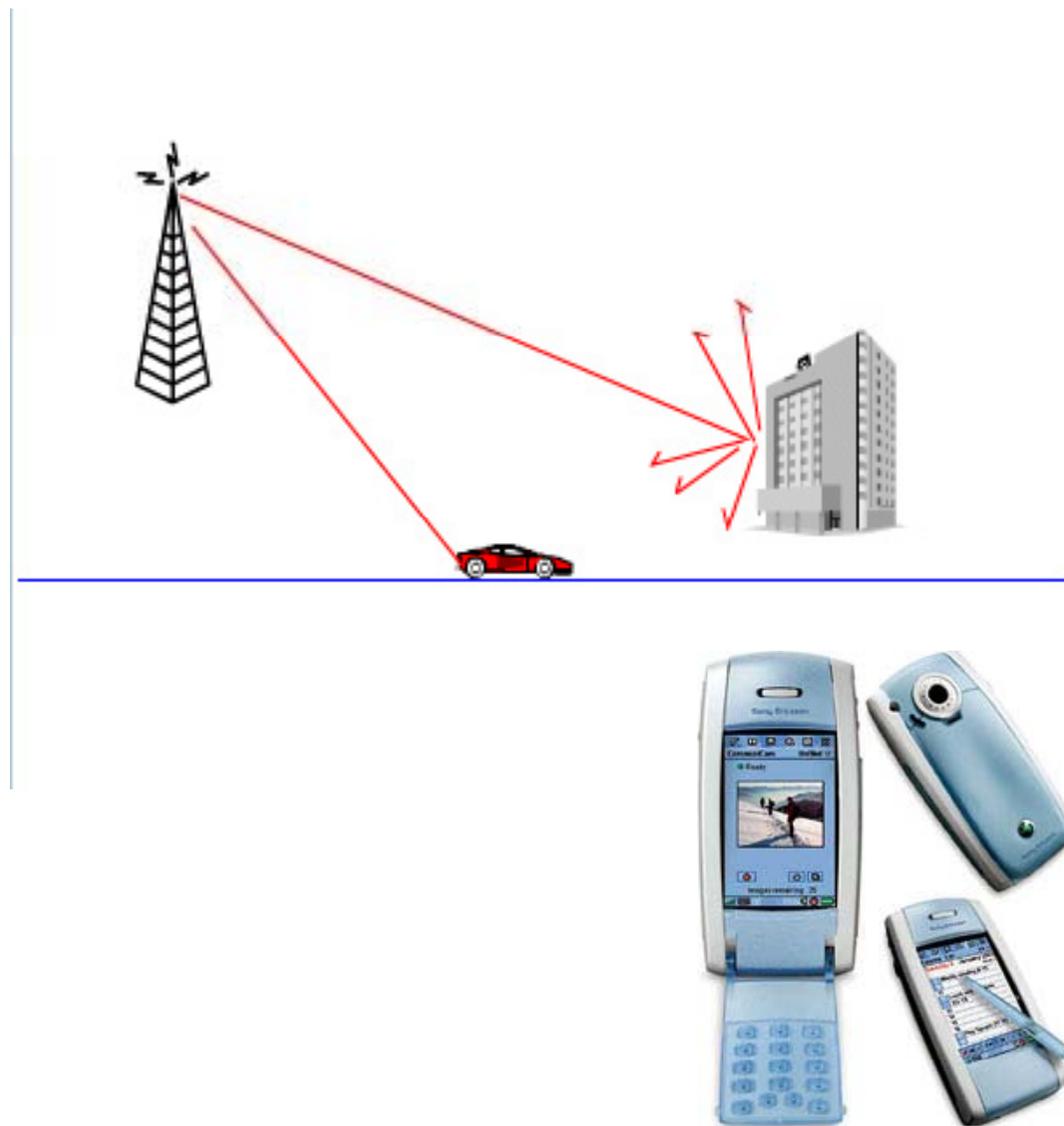


微波通信

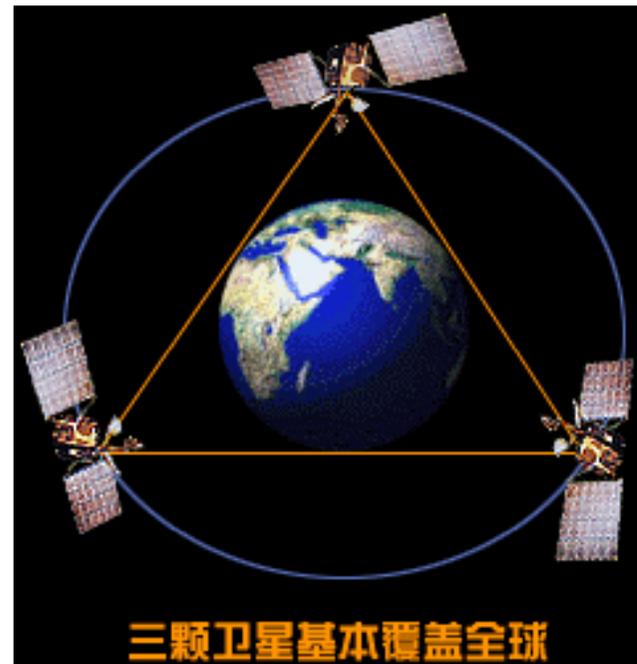
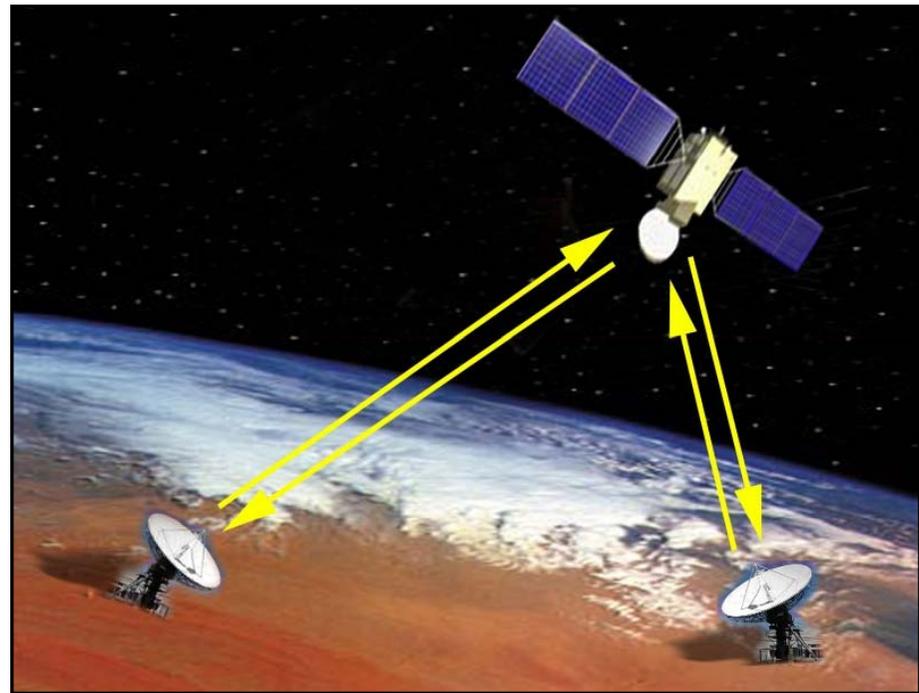
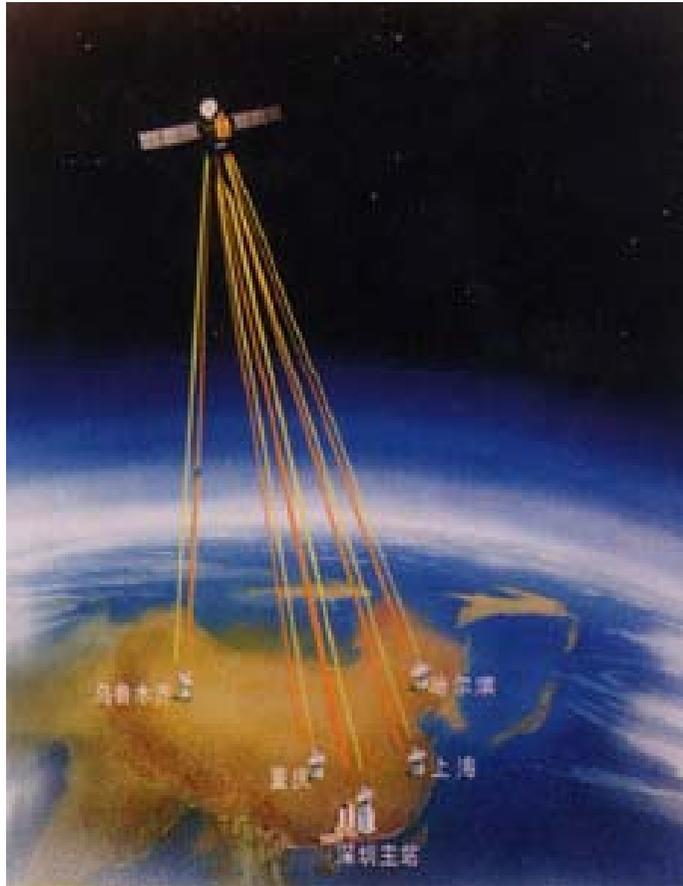




移动通信



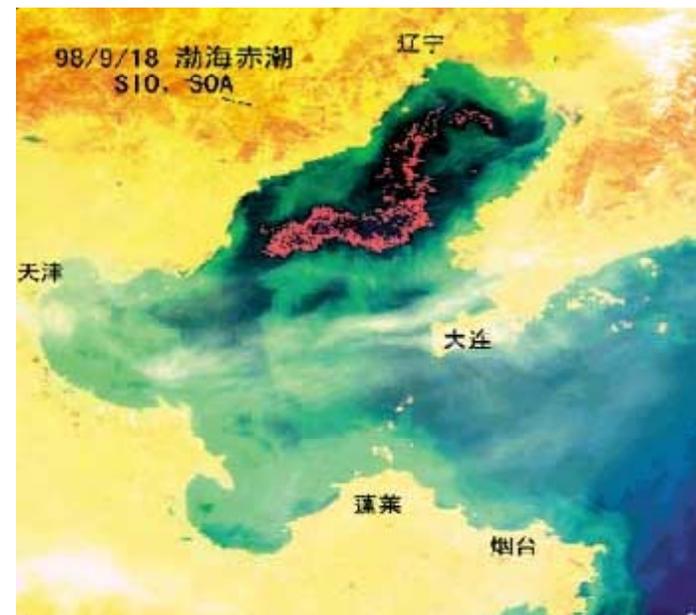
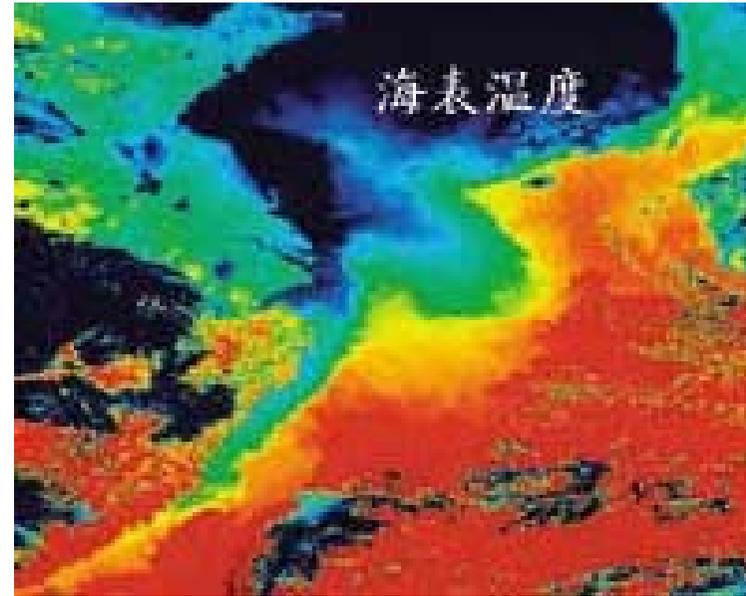
卫星通信



卫星测控、遥感、微波成像



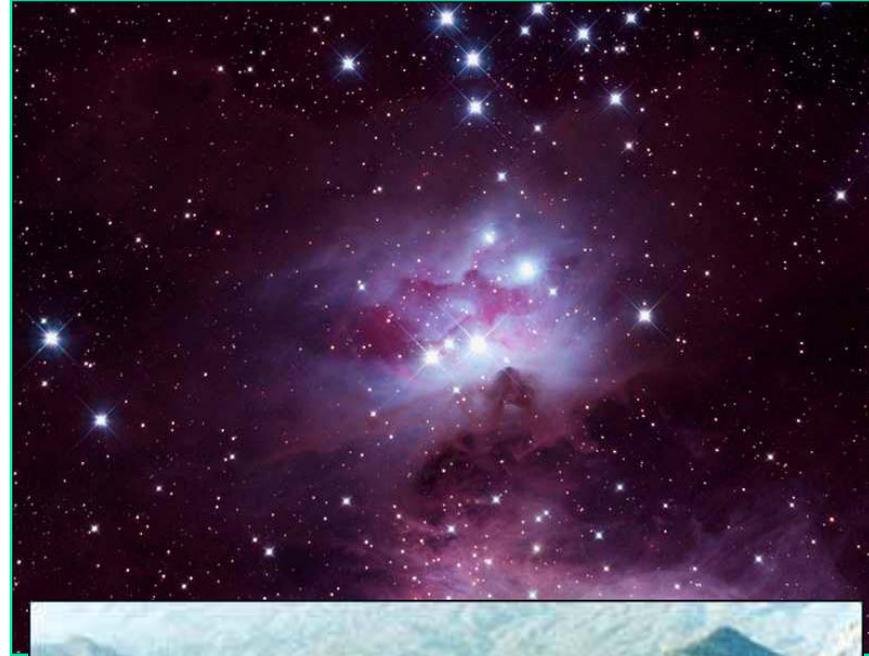
卫星地面测控站



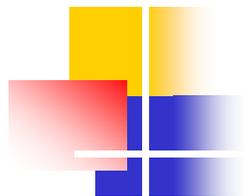
射电天文



射电望远镜

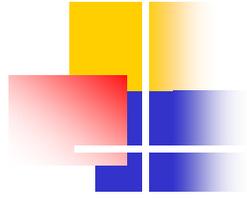


微波武器



电磁波频谱的划分

频段	波长范围	频率范围
极高频(EHF)	0.1~1 cm	30 ~ 300 GHz
特高频(SHF)	1 ~ 10 cm	3 ~ 30 GHz
超高频(UHF)	10 ~ 100 cm	0.3 ~ 3 GHz
甚高频(VHF)	1 ~ 10 m	30 ~ 300 MHz
高频(HF)	10 ~ 100 m	3 ~ 30 MHz
中频(MF)	0.1 ~ 1 km	0.3 ~ 3 MHz
低频(LF)	1 ~ 10 km	30 ~ 300 kHz
甚低频(VLF)	10 ~ 100 km	3 ~ 30 kHz
超低频(ULF)	0.1 ~ 1 Mm	0.3 ~ 3 kHz
特低频(SLF)	1 ~ 10 Mm	30 ~ 300 Hz
极低频(ELF)	10 ~ 100 Mm	3 ~ 30 Hz



射频电磁场下人体的安全水平标准

IEEE/ANSI 标准给出频率为 90 MHz~300 GHz的
射频电磁场下电磁功率面密度限定值如下：

90~300	MHz:	0.2 mW/cm^2 ;
300~12500	MHz:	$f/1250 \text{ mW/cm}^2$ (f 单位为MHz) ;
12.5 ~300	GHz:	10 mW/cm^2 。